Ю.В. ХОРОШКОВ

Вул. Петровського 4, кв. 40, Київ 03087
(e-mail: YuriHoroshkov@gmail.com)

УДК 530.1

ДЗЕРКАЛЬНА СИМЕТРІЯ ЯК ОСНОВА ПОБУДОВИ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОГО КОНТИНУУМУ

За допомогою дзеркального відображення 1-вимірної орієнтованої множини у спеціально створеному на основі симетрії комплексному просторі будується в задзеркаллі простір розмірності $n > 1$. Геометрія отриманого простору описується векторною алгеброю Кліффорда. На основі алгебри гіперболічних гіперкомплексних чисел будується псевдоевклідів простір з метрикою простору Мінковського. Одержано умови аналітичності функції від гіперболічного гіперкомплексного аргументу (h-аналітичність), в яких в неявному вигляді містяться рівняння Максвелла для 4-потенціалу у вільному просторі.

Ключові слова: дзеркальне відображення, алгебра Кліффорда, гіперболічні гіперкомплексні числа, простір Мінковського.

1. Вступ

В останні десятиліття гостро виникла необхідність у пошуку фізичних ідей і математичного апарату, здатних з єдиних позицій описувати різноманіття фізичних явищ. Так, намітилася тенденція переосмислення класичних понять простору-часу на користь використання різних методів алгебри. Тут необхідно згадати бінарну геометрофізику (реляційна теорія) [1], алгебраїчну теорію простору-часу на основі кватерніонів [2, 3], і алгебраїчну геометрію на основі алгебри Кліффорда [4, 5, 12], окремим випадком якої і є кватерніони. Геометрична алгебра Кліффорда претендує на роль уніфікованої мови математичної фізики [17], завдяки потужності математичного апарату всіх відомих комплексних і гіперкомплексних чисел, які ця алгебра природним чином включає в себе. Про перспективність даного напрямку свідчить проведення регулярних конференцій та публікації в рамках ICCA (International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics) [1], а область додатків постійно розширюється від механіки і обробки сигналів до хімії та біології. Торкаючись фізичних додатків, слід зазначити, що навіть виклад традиційних фізичних задач на мові алгебри Кліффорда приводить найчастіше до спрощення математичних викладок і (або) до нових несподіваних результатів. Дійсно, наприклад, аналіз рівнянь руху матеріальної точки в неоднорідному і неізотропному просторі в базисі алгебри Кліффорда частково узгоджується з рівняннями Ейнштейна, а сам принцип побудови рівнянь є альтернативою варіаційним методам [18]. Рівняння руху класичної частинки зі спіном в електромагнітному полі в базисі Кліффорда істотно спрощуються і замість нелінійних рівнянь теорії збурення вирішуються лінійні рівняння [19], а завдання аналізу специфіки нейтрон-ядерної взаємодії та можливості існування нейтрон-ядерних молекул на основі рівняння Дірака [22] можливо досліджува-

[1] 10-а ICCA відбулась 4–8 серпня 2014 р. у м. Тарту, праці ICCA – Journal “Advances in Applied Clifford Algebras”.

ти на мові алгебри Кліффорда [2]. У свою чергу, алгебру Кліффорда пов'язують зі спінорами [10], специфічними геометричними об'єктами, які іноді називають "полувекторами", оскільки зі спостережними величинами зв'язуються лише спінтензори рангу >1. Така роль спінорів і спінорного простору в геометрії схожа на ту роль, яку відіграють хвильові функції в квантовій механіці, і вимагає додаткового аналізу. Оскільки алгебра Кліффорда претендує на роль уніфікованої мови математичної фізики, виникає також питання про її взаємозв'язок із фундаментальними законами природи.

Принципи симетрії, що лежать в основі законів природи [6, 20], останнім часом зазнали серйозного доопрацювання. Недавні дослідження в теорії струн [7, 8] несподівано привернули пильну увагу до розширених можливостей дзеркальної симетрії. У цих дослідженнях дві множини X та X' зв'язувалися як дзеркальні пари за допомогою допоміжного простору. Властивості цих пар цілком залежали від властивостей цього простору в особливих точках і не обмежувалися заміною правого на ліве як у традиційній геометричній дзеркальній симетрії. У цій роботі ідея дзеркальної симетрії за допомогою допоміжного простору використовується для побудови в задзеркаллі (through the looking glass) з 1-вимірної орієнтованої множини векторного простору розмірності $n > 1$. В ролі допоміжного простору використовується спеціально створений на основі симетрії комплексний простір, в якому роль особливих точок виконують певні площини (площини "дзеркал"), щодо яких виконується геометрична дзеркальна симетрія. Послідовно проводиться аналогія отриманого простору з властивостями комплексних чисел, аналізується алгебра, геометрія і фізичні властивості отриманого векторного простору. Для збереження стрункості і логічності викладу наведено як відомі, так і оригінальні результати. Дану роботу необхідно розглядати як першу частину – обґрунтування методу – більш широкого дослідження, яке планується представити в подальшому.

[2] У мережевих ресурсах заслуговують на увагу лекції А.А. Кецариса http://toe-physics.org/ru/lectures.htm або по персоналіях: застосування в теорії поля – (R. Dahm, D. Hestenes, Н.Г. Марчук); електродинаміки – (W.E. Baylis, B. Jancewicz, P. Puska); алгебра Кліффорда – (D. Hestenes, Д.С. Широков)

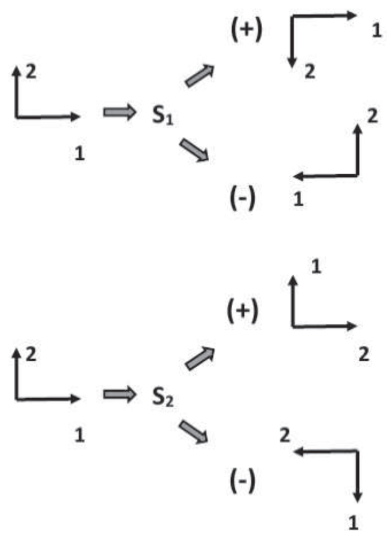

Рис. 1. Дія операторів симетрії на базисні вектори системи координат

2. Побудова допоміжного простору на основі симетрії комплексної площини

Симетрія, слідуючи Картанові (E. Cartan) [9], визначається як операція **S** геометричного дзеркального відображення від гіперплощини M, що проходить через початок координат, в напрямку неізотропного вектора $\boldsymbol{s}$, ортогонального цій гіперплощині. Визначимо операції дзеркальної симетрії $\pm\boldsymbol{s}_1$ і $\pm\boldsymbol{s}_2$ у системі координат на площині, які змінюють напрямки базисних векторів і орієнтацію системи координат згідно з діаграмою, зображеною на рис. 1. Для довільної точки $P = (x, y)$ комплексної площини у векторному базисі $1 \to (1,0)$; $2 \to (0,i)$ операцію симетрії можна представити виразом

$$(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2)\begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy \\ x-iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $\bar{z}$ – позначає комплексно сполучену величину. В результаті дзеркальної симетрії (1) комплексна площина в базисі $(1, \mathrm{i})$ відображається в 3-вимірному базисі (1,0), (0,1), $(\mathrm{i}, \bar{\mathrm{i}})$ як площина, що проходить через вісь уявних координат по бісектрисі ортогональних осей (1,0) і (0,1) (рис. 2).

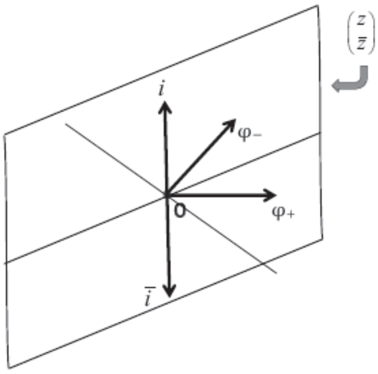

Рис. 2. Допоміжний комплексний простір дзеркальних відображень

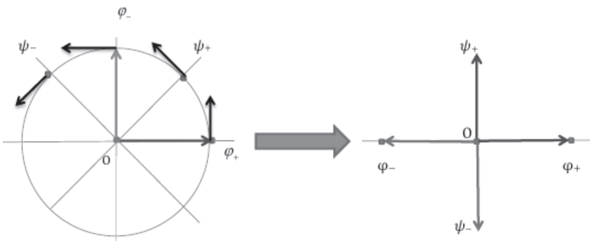

Рис. 3. Побудова ортогональної системи координат в задзеркаллі

Вісь уявних координат представляється комбінацією двох протилежно орієнтованих уявних осей з загальною точкою 0, ортогональних до площини базисних векторів (1,0) і (0,1). Позначимо ці ортогональні вектори як $\varphi_+ = (1,0)$ і $\varphi_- = (0,1)$. Комплексифікація дійсної евклідової площини комбінацією симетричних уявних осей породжує простір $\mathcal{E}_2^{++}$ з двох ортогональних комплексних площин у базисах $(\varphi_+, \mathrm{i}\varphi_+)$ і $(\varphi_-, \bar{\mathrm{i}}\varphi_-)$ відповідно. Площини перетинаються по уявних осях, мають одну спільну точку 0 і визначають в загальному випадку комплексний вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\xi, \bar{\eta})$. Якщо розглядати $\mathcal{E}_2^{++}$ як 3-вимірний простір, то його довільна точка P має дійсні координати $P = (x_1, x_2, \pm y)$, де координата $\pm y$ відповідає комбінації уявних осей, а вектор $\boldsymbol{\gamma}$ має координати $\xi = x_1 + iy$, $\bar{\eta} = x_2 - iy$. Подання комплексного числа 2-вимірним комплексним вектором $(z, \bar{z})$ має своє логічне обґрунтування. Дійсно, множення двох комплексних чисел можна представити у вигляді

$$z_1 z_2 = (z_1 \bullet \bar{z}_2) + i[z_1 \times \bar{z}_2], \tag{2}$$

де $(z_1 \bullet \bar{z}_2)$ – позначає скалярний добуток, а $[z_1 \times \times \bar{z}_2]$ – векторний добуток векторів z_1 і $\bar{z}_2$. Дійсна Re і уявна Im частини (3) представляються симетричною і кососиметричною формами:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_1 z_2) &= (z_1 \bullet \bar{z}_2) = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1), \\ \mathrm{Im}(z_1 z_2) &= [z_1 \times \bar{z}_2] = -\frac{i}{2}(z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Як буде показано нижче, вирази (2), (3) справедливі і для гіперкомплексних чисел.

3. Побудова системи координат в задзеркаллі

Побудову системи координат в задзеркаллі будемо виконувати операцією дзеркальної симетрії базисного вектора φ_+ в площині (φ_+, φ_-) простору $\mathcal{E}_2^{++}$. Для цього запишемо оператор дзеркальної симетрії в загальному вигляді таким чином:

$$\mathbf{S}(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{s}_1 + \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{s}_2, \tag{4}$$

де кут $\alpha/2$ відраховується від базисного вектора φ_+ проти годинникової стрілки, а сам кут α визначає кут між новими базисними векторами в задзеркаллі і дзеркальним образом вектора φ_+. Введення множника 1/2 зумовлене властивостями дзеркальних відображень. Необхідно відразу зазначити, що, завдяки цьому множнику, перетворення симетрії в межах кутів $0 \le \alpha/2 < 2\pi$ двічі накривають простір в задзеркаллі. У зв'язку з цим, перетворення в межах $0 \le \alpha/2 < \pi$ і $\pi \le \alpha/2 < 2\pi$ будемо аналізувати окремо. Будемо будувати в задзеркаллі ортогональну базисну систему координат на площині, що відповідає кутам $\alpha = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/4$. Підставивши ці значення в (4), отримаємо в задзеркаллі дві пари протилежно орієнтованих базисних вектора:

$$\begin{aligned} &\varphi_+ = \mathbf{S}(0)\varphi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \ \psi_+ = \mathbf{S}(\pi/2)\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \\ &\varphi_- = \mathbf{S}(\pi)\varphi_+ = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \ \psi_- = \mathbf{S}(3\pi/4)\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Операції дзеркальної симетрії $\mathbf{S}(\alpha)$ щодо вибраних площин у просторі $\mathcal{E}_2^{++}$ відобразили (рис. 3) у задзеркаллі вхідний 1-вимірний векторний простір R_1 як 2-вимірний векторний простір, ортогональні координатні осі якого представлені розшаруванням двох протилежно орієнтовних базисних векторів із загальною точкою 0 початку координат (права частина рис. 3). Отримана базисна система векторів добре вписується в концепцію довільності вибору напрямку та орієнтації системи координат, однак її можна розглядати тільки як можливу реалізацію системи координат, оскільки координати довільної точки мають невизначеність у знаку чисельних значень. Формалізувати можливість протилежної орієнтації базисного вектора можна введенням вектор-оператора симетрії $\boldsymbol{e}$, у якого протилежно орієнтовні пари векторів є власними векторами, а власні значення ± 1 відповідають за ту чи іншу орієнтацію базисного вектора. Оскільки власні вектори визначені виразами (5), неважко отримати матричне подання вектор-операторів у вигляді

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\boldsymbol{e}_i \varphi_{i\pm} = \pm 1 \varphi_{i\pm}, \ \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^2 = \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{6}$$

де $\mathbf{1}$ – одиниця, представлена діагональною матрицею, може розглядатися як тотожний оператор симетрії. Якщо звернутися до правої частини рис. 3, то його можна вважати геометричним образом базисних вектор-операторів.

Для перетворень $\mathbf{S}(\alpha)$ в межах кутів $2\pi \leq \alpha < < 4\pi$ з (4) випливає співвідношення

$$\mathbf{S}(2\pi \leq \alpha < 4\pi) = -\mathbf{S}(0 \leq \alpha < 2\pi). \tag{7}$$

Перетворення (7) дозволяють отримати ще дві пари ортогональних базисних вектора в задзеркаллі $\bar{\varphi}_\pm$ і $\bar{\psi}_\pm$, які пов'язані з векторами (5) співвідношеннями

$$\bar{\varphi}_\pm = -\varphi_\pm; \bar{\psi}_\pm = -\psi_\pm. \tag{8}$$

Неважко помітити, що базисні вектори (8) визначають вектор-оператори $\bar{\boldsymbol{e}}_i = -\boldsymbol{e}_i$. Вирази (7), (8) відображають відому проблему знакової невизначеності перетворень у спінорному просторі [3]. Однак, можна розглянути цю проблему під іншим кутом зору. Дійсно, використовуючи аналогію з векторним поданням комплексного числа у допоміжному комплексному просторі спільно з його сполученим значенням, будемо вважати вектор $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ сполученим значенням вектора $\boldsymbol{e}_i$. Такий підхід дозволяє розглядати перетворення в спін-просторі тільки в межах кутів $0 \leq \alpha < 2\pi$ за умови введення операції сполучення як самостійної базової операції. Таким чином, операції дзеркальної симетрії (5) у допоміжному комплексному просторі формально виконали операцію $\mathbf{S}$: $R_1 \mapsto R_{2(2)}$, де $R_{2(2)}$ – позначає 2-вимірний векторний простір у задзеркаллі з розшаруванням протилежно орієнтовних базисних векторів. У свою чергу, $R_{2(2)}$ є геометричним образом алгебри матричних операторів $\boldsymbol{e}_i$, на яких будемо далі будувати векторний евклідовий простір E_2.

4. Алгебра та геометрія E_2 у задзеркаллі

Для побудови евклідового простору необхідно визначити скалярний добуток. Оскільки вектори представлені матрицями, їх добуток у загальному випадку некомутативний, тому формально можна записати

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1). \tag{9}$$

Симетрична білінійна форма визначає внутрішній або скалярний добуток векторів:

$$\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1). \tag{10}$$

Кососиметрична форма визначає зовнішній добуток векторів:

$$\boldsymbol{e}_{12} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1). \tag{11}$$

Умова ортогональності векторів $\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2 = 0$, і з (9), (10) отримаємо

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1, \ \boldsymbol{e}_{12} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2, \ \boldsymbol{e}_{21} = -\boldsymbol{e}_{12}. \tag{12}$$

З (12) випливає, що *ортогональні вектори антикомутують* між собою. Зовнішній добуток утворює бівектор $\boldsymbol{e}_{12}$, який для ортогональних векторів є просто їх добутком і змінює знак при зміні порядку співмножників (порядку індексів). Зміна знака бівектора при зміні порядку індексів є властивістю кососиметричної форми для ортогональних векторів, а не некомутативності матричного множення.

[3] Ця проблема описана як у підручниках (наприклад, М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М., изд. 1 "Наука", 1986, лекция 24), так і в спеціальній літературі [15] с. 33.

Бівектор $\boldsymbol{e}_{12}$ також визначає симетрію системи координат, оскільки є комбінацією симетрій. Щоб її визначити, скористаємося виразом для дзеркального відображення вектора $\boldsymbol{x}$ в базисі $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ в напрямку одиничного вектора $\boldsymbol{s}$ [10]: $\mathbf{x}' = -\boldsymbol{sxs}$. Якщо $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, а операцію відображення провести двічі, спочатку при $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_2$, а потім $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_1$, отримаємо

$$\boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_i, \tag{13}$$

де використані властивості (12). Оскільки парні відображення породжують обертання, то (13) відповідає оберту базисної системи координат на кут 180°. Для $R_{2(2)}$ це відповідає тому, що базисні вектори з індексами "+" і "–" міняються місцями. Бівектор $\boldsymbol{e}_{12}$ визначає орієнтовну площу паралелограма, побудованого на векторах $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, тому вісь обертання в $R_{2(2)}$ будемо вважати віссю координат бівектора. Тоді аналогічно (8) маємо

$$\boldsymbol{e}_{12}\varphi_{12\pm} = \pm i\varphi_{12\pm}, \boldsymbol{e}_{12}^2 = -\mathbf{1}, \tag{14}$$

де i – уявна одиниця. Комплексифікація $R_{2(2)} \to$ $\to R_{2(2)}^{+(+)}$ введенням розшарування уявних координатних осей обертання стала можливою завдяки розширенню для площині поняття симетрії як обертання на кут ±180°. Бівектор $\boldsymbol{e}_{21} = -\boldsymbol{e}_{12}$ має протилежну орієнтацію і змінює в цілому орієнтацію базисної системи векторів $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_{21}$ на $R_{2(2)}^{+(+)}$. Якщо до отриманої системи вектор-операторів симетрії додати тотожну симетрію $\mathbf{1}$, то отримаємо систему лінійно незалежних векторів, на яких будується алгебра Кліффорда $\mathbf{C}_2$ над полем дійсних або комплексних чисел:

$$\mathbf{A} = a^0\mathbf{1} + a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^{12}\boldsymbol{e}_{12}. \tag{15}$$

Таблиці множення базисних векторів кватерніонів для правої та лівої орієнтації системи координат

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$		$\boldsymbol{i}^*$	$\boldsymbol{j}^*$	$\boldsymbol{k}^*$
$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{-1}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{i}^*$	$\mathbf{-1}$	$\boldsymbol{k}^*$	$-\boldsymbol{j}^*$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$	$\mathbf{-1}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}^*$	$\boldsymbol{k}^*$	$\mathbf{-1}$	$\boldsymbol{i}$
$-\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{-1}$	$\boldsymbol{k}^*$	$\boldsymbol{j}^*$	$-\boldsymbol{i}^*$	$\mathbf{-1}$

Вираз (15) будемо називати агрегатом [10], де a^0 – скаляр, a^1, a^2 – компоненти вектора, а a^{12} – компонента бівектора. В алгебрі $\mathbf{C}_2$ містяться всі три відомі системи комплексних чисел з парами базисів $(1, i)$, $(1, e)$, $(1, \epsilon)$, які мають свої аналоги в $\mathbf{C}_2$:

- звичайні комплексні числа $a+ib$, $i^2 = -1$ $1 \to \mathbf{1}$; $i \to \boldsymbol{e}_{12}$;
- подвійні числа $a+eb$, $e^2 = 1$ $1 \to \mathbf{1}$; $e \to \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$;
- дуальні числа $a + \epsilon b$, $\epsilon^2 = 0$ $1 \to \mathbf{1}$; $\epsilon \to (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_{12})$.

За властивостями модулів $|z|^2 = z\bar{z}$, які визначаються виразами $|z|^2 = a^2 + b^2$; $|z|^2 = a^2 - b^2$; $|z|^2 = a^2$, ці числа іноді називають *еліптичними, гіперболічними або параболічними комплексними числами* відповідно [11]. Можливості $\mathbf{C}_2$ цим не обмежуються. Якщо в $R_{2(2)}^{+(+)}$ від базису $(\varphi_{1\pm}, \varphi_{2\pm})$ формально перейти до базису $(i\varphi_{1\pm}, i\varphi_{2\pm})$, то в $\mathbf{C}_2$ маємо новий базис $(i\boldsymbol{e}_1, i\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_{12})$ у правій системі координат і $(i\boldsymbol{e}_1, i\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_{21})$ – в лівій. Введемо нові позначення цих векторів $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ для правої системи координат і $(\boldsymbol{i}^*, \boldsymbol{j}^*, \boldsymbol{k}^*)$ – для лівої. Алгебри Кліффорда (15), побудовані на цих базисних векторах, утворюють системи еліптичних гіперкомплексних чисел, відомі як кватерніони. При цьому історично склалося так, що більшість авторів використовують систему з лівою орієнтацією базисних векторів. Якщо виразити кватерніон через скалярну та векторну частину $\boldsymbol{Q}(a, \boldsymbol{u})$, то неважко перевірити за допомогою таблиці множення базисних векторів, що добуток двох кватерніонів $\boldsymbol{Q}(a, \boldsymbol{u})\boldsymbol{Q}(b, \boldsymbol{v})$ для правої системи координат $\boldsymbol{Q}_R$ і $\boldsymbol{Q}_L$ для лівої системи мають вигляд

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Q}_R(ab - \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}, a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \\ &\boldsymbol{Q}_L(ab - \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}, a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \end{aligned} \tag{16}$$

де $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$ – позначає скалярний добуток векторів, а $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ – векторний добуток. Відмінність виразів (16) полягає в різних знаках векторного добутку.

Необхідно зазначити, що базисні вектори кватерніонів $\boldsymbol{Q}_R$ і $\boldsymbol{Q}_L$ за своїми властивостями є бівекторами і утворюють 3-вимірний простір бівекторів B_3 з правою і лівою орієнтацією. Необхідність розглядати орієнтації системи координат пов'язана з тим фактом, що інваріант комплексного, або гіперкомплексного числа, в загальному випадку, утворюється як квадратична форма вихідного і сполученого числа. Сполучене число в даній роботі вводиться за допомогою операцій симетрії, які змінюють орієнтацію систем координат. Дійсно, розглядаючи агрегат (15) як гіперкомплексне число загального вигляду в 4-вимірному просторі, сполучний агрегат $\bar{\mathbf{A}}$ будується в базисі:

$$\mathbf{1}, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_{12}. \tag{17}$$

Інваріант або *фундаментальна квадратична форма* (ФКФ), яку визначимо як $|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}$, має вигляд

$$|\mathbf{A}|^2 = (a^0)^2 + (a^{12})^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2. \tag{18}$$

Така невизначена ФКФ відповідає псевдоевклідовому простору $H_4^{(2)}$. Неважко перевірити, що для кватерніонів ФКФ позитивно певна і відповідає евклідовому простору H_4. Необхідність уважного ставлення до орієнтації систем базисних векторів і бівекторів істотно зростає при переході від 2-вимірного простору до 3-вимірного, який розглядається в наступному розділі. Дійсно, 3-вимірний простір формально включає в себе три орієнтовані площини, в яких визначені ортогональні полярні базисні вектори, а їх орієнтація задається відповідним бівектором. Спільна орієнтація базису полярних векторів, таким чином, тісно пов'язана з орієнтацією базисних бівекторів. За загально прийнятою угодою за замовчуванням використовуються базиси з правою орієнтацією, якщо тільки якісь особливі причини не змушують від нього відійти – і тоді це зумовлюється явно.

5. Алгебра та геометрія $\boldsymbol{E}_3$ у задзеркаллі

Для отримання третього вектора базису Кліффорда будемо виконувати операцію дзеркальної симетрії (4) для базисного вектора φ_+ в площині $(\varphi_+, \bar{i}\varphi_-)$. Враховуючи орієнтацію цієї площини (рис. 2), для отримання 3-вимірного базису Кліффорда з правою орієнтацією кути α повинні набувати значення $\alpha = -\pi/2$, $-3\pi/4$. У цьому випадку власні вектори $\varphi_{3\pm}$ і базисний вектор $\boldsymbol{e}_3$ мають вигляд

$$\begin{gathered} \varphi_{3+} = \mathbf{S}_3(-\pi/2)\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}; \\ \varphi_{3-} = \mathbf{S}_3(-3\pi/4)\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ i\end{pmatrix}; \ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{19}$$

Повна алгебра Кліффорда на $\mathbf{C}_3$ містить вісім базисних векторів:

- скаляр (0-вектор) $a^0\mathbf{1} = A_S$,
- вектор $a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3 = A_V$,
- бівектор $a^{23}\boldsymbol{e}_{23} + a^{31}\boldsymbol{e}_{31} + a^{12}\boldsymbol{e}_{12} = A_B$,
- тривектор $a^{123}\boldsymbol{e}_{123} = a^{123}\boldsymbol{i} = A_{PS}$.

Базисний тривектор або псевдоскаляр $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_{123}$ комутує з усіма векторами і бівекторами, а його властивості визначаються виразами

$$\boldsymbol{i}^2 = -\mathbf{1},\ \boldsymbol{i}^{-1} = \boldsymbol{e}_{321} = -\boldsymbol{e}_{123},\ \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}^{-1} = \mathbf{1},\ \boldsymbol{i} = i\mathbf{1}, \tag{20}$$

де i – уявна одиниця. Геометричним образом тривектора є об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\boldsymbol{e}_i$. Таблицю множення базисних векторів отримуємо досить легко, якщо врахувати, що парні перестановки індексів дають в результаті множник $+1$, а непарні -1. Алгебра $\mathbf{C}_3$ включає в себе всі операції звичайної векторної алгебри в класичній механіці [4], однак властивості $\mathbf{C}_3$ на цьому не обмежуються. Сформуємо систему гіперболічних гіперкомплексних чисел $\mathbf{H}$ і сполучених йому $\bar{\mathbf{H}}$ таким чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= a^0\boldsymbol{e}_0 + a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3, \\ \bar{\mathbf{H}} &= a^0\boldsymbol{e}_0 - a^1\boldsymbol{e}_1 - a^2\boldsymbol{e}_2 - a^3\boldsymbol{e}_3, \end{aligned} \tag{21}$$

де $\boldsymbol{e}_0 = \mathbf{1}$. Фундаментальна квадратична форма $|\mathbf{H}|^2 = \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}$ має вигляд

$$|\mathbf{H}|^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2. \tag{22}$$

ФКФ (22) відповідає метриці псевдоевклідового простору Мінковського $M_4^{(3)}$. Для того щоб довести, що $\mathbf{H} \in M_4^{(3)}$, визначимо метричний тензор $g_{\alpha\beta}$ через скалярний добуток базисних векторів $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$, аналогічний виразу для комплексних чисел (3):

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha \bullet \bar{\boldsymbol{e}}_\beta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_\alpha\bar{\boldsymbol{e}}_\beta + \boldsymbol{e}_\beta\bar{\boldsymbol{e}}_\alpha). \tag{23}$$

Якщо використовувати $\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_0$ $(n = 1, 2, 3)$, то неважко перевірити, що $g_{\alpha\beta}$ має діагональний вигляд з сигнатурою $\mathrm{diag}(g_{\alpha\beta}) = (+1, -1, -1, -1)$. Іншими словами, гіперболічне гіперкомплексне число $\mathbf{H}$ являє собою вектор у псевдоевклідовому просторі Мінковського $M_4^{(3)}$ з ортогональними базисними векторами $\boldsymbol{e}_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, 3)$. Гіперкомплексне число $\mathbf{H}$ можна розглядати як гіперболічний кватерніон або $\mathbf{H}$-кватерніон, який, на відміну від звичайних кватерніонів, не утворює тіло і алгебру з поділом, хоча і з деякими застереженнями. Тим не менш, $\mathbf{H}$-кватерніони зі структурою простору Мінковського вимагають подальших досліджень у фізичних задачах. Перші спроби побудови алгебраїчної теорії простору-часу і матерії на основі 2-вимірних гіперболічних чисел вже відомі [13, 14]. У цій роботі відзначимо лише деякі особливості диференціальних операцій над гіперболічними гіперкомплексними числами.

Як і для звичайних комплексних чисел, будемо координати 4-вектора вважати функціями 4-х змінних $a^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Введемо просторово-часовий 4-градієнт як коваріантний вектор у взаємному базисі $(\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^n)$:

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}^\alpha \partial_\alpha = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{e}^0\partial_0, \boldsymbol{e}^n\partial_n),\ \partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{24}$$

де використовується правило підсумовування по повторюваних індексах. Сформулюємо умови аналітичності функції $\mathbf{G}(\mathbf{H})$ від гіперболічного гіперкомплексного аргументу, подібні умовам Коші–Рімана для звичайних комплексних чисел. Для цього скористаємося побудовою інваріанта гіперкомплексного числа як його комбінації у вихідному і сполученому базисах (правої і лівої орієнтації системи координат). Для 4-градієнта зв'язок між вихідним і взаємним базисами задається метричним тензором $\boldsymbol{e}_\alpha = g_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\beta$, тому 4-градієнт у вихідному базисі визначається виразом

$$\bar{\boldsymbol{\nabla}} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{e}_0\partial_0, \bar{\boldsymbol{e}}_n\partial_n). \tag{25}$$

Умову аналітичності $\mathbf{G}(\mathbf{H})$ запишемо у вигляді рівняння $\bar{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{G}(a^0\boldsymbol{e}_0, a^n\boldsymbol{e}_n) = 0$. Безпосередні обчислення і прирівнювання нулю компонент скаляра, вектора і бівектора дають в скороченому записі:

$$\partial_0 a^0 = \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{a}};\ \partial_0\vec{\boldsymbol{a}} = \operatorname{grad} a^0;\ \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{a}} = 0, \tag{26}$$

де використовується позначення $\vec{\boldsymbol{a}} = a^n\boldsymbol{e}_n$. Якщо розглянути простий випадок подвійних чисел, то з (26) випливає

$$\frac{\partial a^0}{\partial x^0} = \frac{\partial a^1}{\partial x^1};\ \frac{\partial a^1}{\partial x^0} = \frac{\partial a^0}{\partial x^1}. \tag{27}$$

Вираз (27) відповідає умові гіперболічної аналітичності або h-аналітичності для подвійних чисел [16]. Тому будемо припускати, що умови (26) є розширенням h-аналітичності на випадок гіперкомплексних гіперболічних чисел. Якщо визначити функцію $\mathbf{G}(\mathbf{H})$ як вектор 4-потенціалу $\mathbf{A}(\varphi^0\boldsymbol{e}_0, A^n\boldsymbol{e}_n)$, обчислити div другої рівності і підставити результат у першу рівність в (26), одержимо рівняння Максвелла для скалярного потенціалу φ. Можна використовувати інший спосіб, а саме обчислити $\bar{\nabla}\bar{\mathbf{A}}$:

$$\bar{\boldsymbol{\nabla}}\bar{\mathbf{A}} = (\partial_0\varphi^0 + \operatorname{div}\vec{\mathbf{A}})\boldsymbol{e}_0 - \partial_0\vec{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\varphi^0 + i\operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}, \tag{28}$$

де $\vec{\mathbf{A}} = A^n\boldsymbol{e}_n$. Вираз (28) містить скаляр $A_S = \partial_0\varphi^0 + \operatorname{div}\vec{\mathbf{A}}$, вектор $\mathbf{E} = -\partial_0\vec{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\varphi^0$ і бівектор $i\mathbf{H} = i\operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}$. Якщо покласти $A_S = 0$ (калібрування Лоренца (Lorenz gauge condition)) і асоціювати $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ з векторами електричного і магнітного полів відповідно, то вираз (28) визначає комплексний вектор Рімана–Зільберштейна (Riemann–Silberstein vector) $\mathbf{R} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$. Необхідно особливо відзначити, що введення сполучення 4-потенціалу $\bar{\mathbf{A}}$ пов'язане з необхідністю зрівнювання орієнтацій базисних систем координат у виразі (28). І, нарешті, рівняння $\nabla\mathbf{R} = 0$ включає в себе рівняння Максвелла для вектора $\mathbf{R}$ у вільному просторі $(\epsilon, \mu = 1)$.

6. Перетворення координат у $\mathcal{E}_2^{++}$ та задзеркаллі

Комплексний евклідовий простір $\mathcal{E}_2^{++}$, в якому виконуються дзеркальні відображення, по суті, є простором власних векторів вектор-операторів симетрії $\boldsymbol{e}_i$. Тому довільний вектор $\boldsymbol{\gamma}$ у цьому просторі розкладається по будь-якій парі $(\varphi_{i+}, \varphi_{i-})$ ортогональних власних векторів $\boldsymbol{e}_i$, і вплив $\boldsymbol{e}_i$ на $\boldsymbol{\gamma}$ описується виразами

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \xi^i\varphi_{i+} + \eta^i\varphi_{i-};\ \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\gamma} = \xi^i\varphi_{i+} + (-\eta^i)\varphi_{i-}, \tag{29}$$

де ξ^i, η^i – представлення $\boldsymbol{\gamma}$ у відповідному базисі. У розділі 3 були розглянуті дзеркальні відображення в $\mathcal{E}_2^{++}$, які утворюють групу невласних обертань. У цьому розділі будуть розглянуті власні обертання системи координат $\mathbf{V}$ в $\mathcal{E}_2^{++}$ і в задзеркаллі. Якщо піддати обидві частини виразу (29) деякому перетворенню $\mathbf{V}$, то неважко отримати зв'язок перетворення в $\mathcal{E}_2^{++}$ і базисних векторів $\boldsymbol{e}_i$ у вигляді

$$\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{\gamma}' = \xi^i\varphi'_{i+} + (-\eta^i)\varphi'_{i-}, \tag{30}$$

де перетворені величини визначаються виразами

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}'_i = \mathbf{V}\boldsymbol{e}_i\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}, \\ &\varphi'_{i+} = \mathbf{V}\varphi_{i+}\varphi'_{i-} = \mathbf{V}\varphi_{i-}. \end{aligned} \tag{31}$$

Обмежимося тут унімодулярними перетвореннями $\mathbf{V}$ з детермінантом рівним $+1$. Обертання будемо аналізувати в п'яти площинах $\mathcal{E}_2^{++}$, які визначаються парами базисних векторів $(\varphi_+, \varphi_-); (\varphi_+, i\varphi_+); (\varphi_-, \bar{i}\varphi_-); (\varphi_+, \bar{i}\varphi_-); (\varphi_-, i\varphi_+)$. Позначення $\bar{i}$ для уявної одиниці вказує на те, що уявна вісь координат $\bar{i}\varphi_-$ орієнтовна протилежно уявній осі $i\varphi_+$ (рис. 2). Перетворення базису в дійсній площині (φ_+, φ_-) проти годинникової стрілки описується виразом

$$\begin{aligned} \varphi'_{i+} &= \cos\frac{\alpha}{2}\varphi_+ + \sin\frac{\alpha}{2}\varphi_-, \\ \varphi'_{i-} &= -\sin\frac{\alpha}{2}\varphi_+ + \cos\frac{\alpha}{2}\varphi_-. \end{aligned} \tag{32}$$

Матриця, що описує обертання базису на кут $\alpha/2$ навколо розшарування уявних осей, має вигляд

$$\mathbf{V}(\alpha/2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Перетворення базису в площині $(\varphi_+, \bar{i}\varphi_-)$ на кут $\beta/2$ навколо осі φ_- в напрямку від осі φ_+ до позитивного напрямку осі $\bar{i}\varphi_-$ (за годинниковою стрілкою) має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi'_{i+} &= \cos\frac{\beta}{2}\varphi_+ + \sin\frac{\beta}{2}(i\varphi_-), \\ (i\varphi_-)' &= -\sin\frac{\beta}{2}\varphi_+ + \cos\frac{\beta}{2}(i\varphi_-). \end{aligned} \tag{34}$$

Такий напрям обертання вибрано з міркувань позитивної визначеності кута β. Множенням другої рівності в (34) на $-i$ обертання навколо осі φ_-в площині $(\varphi_+, \bar{i}\varphi_-)$ перетворюється в відповідне обертання близько розшарування уявних осей в площині (φ_+, φ_-). Матриця такого перетворення має вигляд

$$\mathbf{V}(\beta/2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & i\sin\frac{\beta}{2} \\ i\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Перетворення базису в площині $(\varphi_-, i\varphi_+)$ на кут $\gamma/2$ навколо осі φ_+ проти годинникової стрілки описується подібно (35), а матриця перетворення має вигляд

$$\mathbf{V}(\gamma/2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & i\sin\frac{\gamma}{2} \\ i\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Перетворення в площинах $(\varphi_+, i\varphi_+)$ і $(\varphi_-, \bar{i}\varphi_-)$ – спільне перетворення пари комплексних чисел і в загальному вигляді описується виразом

$$\mathbf{V}(k, \delta/2) = \begin{pmatrix} k\exp(i\delta/2) & 0 \\ 0 & k^{-1}\exp(-i\delta/2) \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Перетворення вигляду (37) – гомотетія (стиснення-розширення) з поворотом у комплексній площині.

Для аналізу перетворень базису в задзеркаллі перенумеруємо базисні вектори $\boldsymbol{e}_i$ таким чином, щоб компоненти вектора $\mathbf{r} = (x, y, z)$ у задзеркаллі $\mathbf{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ відповідали матричному поданню:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Матриці перетворення координат (33), (35)–(37) можна розкласти по базису Кліфорда $(\mathbf{1}, \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)$ і визначити обертання в задзеркаллі через кватерніонні змінні $\mathbf{Q}$. Наприклад, обертання (33) перетвориться до вигляду

$$\mathbf{V}(\alpha/2) = \mathbf{Q}(\alpha/2) = \cos\frac{\alpha}{2}\mathbf{1} + \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1. \tag{39}$$

Оскільки $\boldsymbol{e}'_i = \mathbf{V}\boldsymbol{e}_i\mathbf{V}^{-1}$, а $\boldsymbol{e}_{31}$ антикомутують з $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$ і комутують з $\boldsymbol{e}_2$, перетворення вектора $\mathbf{r}$ в задзеркаллі запишеться у вигляді

$$\mathbf{r}' = \mathbf{Q}(\alpha)(x\boldsymbol{e}_1 + z\boldsymbol{e}_3) + y\boldsymbol{e}_2. \tag{40}$$

Вираз (40) описує обертання навколо базисної осі $\boldsymbol{e}_2$. Аналогічно для перетворення (35) отримаємо обертання навколо базисного вектора $\boldsymbol{e}_1$ у вигляді

$$\mathbf{r}' = x\boldsymbol{e}_1 + \mathbf{Q}(\beta)(y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3), \tag{41}$$

де $\mathbf{Q}(\beta) = \cos\beta\mathbf{1} + \sin\beta\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$. Вирази (35), (36) є прикладом ефекту "виродження" за наявності симетрії, в даному випадку симетрії уявних осей. Подібне явище має місце в квантовій механіці, коли енергетичне виродження по спінових станах знімається тільки пониженням симетрії за допомогою магнітного поля. Тому обертання навколо базисного вектора $\boldsymbol{e}_3$ будемо описувати виразом (37) і, вважаючи $k = 1$ і $\delta = \gamma$, відповідний кватерніон має вигляд $\mathbf{Q}(\gamma) = \cos\gamma\mathbf{1} + \sin\gamma\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$. Для $k \neq 1$ аналоги перетворень 3-вимірного простору невідомі.

Однак у просторі метрики Мінковського змінна k відповідає за перетворення буста спеціальної теорії відносності. Необхідно зазначити, що у виразах (40), (41) дія кватерніона на координати в дужках можлива не тільки зліва-направо, а й справа-наліво. При цьому необхідно змінити знаки кутів перетворення на протилежні.

7. Обговорення результатів

1. Отримані дзеркальними відображеннями у допоміжному комплексному просторі 2- або 3-вимірні простори в "задзеркаллі" мають базис векторної алгебри Кліффорда. Базисні вектори алгебри Кліффорда $\boldsymbol{e}_i$, в свою чергу, є операторами симетрії, які описують дві протилежні орієнтації базисного вектора. Ці властивості дзеркальних відображень підкреслюють безпосередній зв'язок алгебри Кліффорда з фундаментальними принципами симетрії. Побудований за допомогою операцій симетрії допоміжний комплексний простір $\mathcal{E}_2^{++}$, в якому виконуються операції дзеркального відображення, по суті, є простором власних векторів для вектор-операторів симетрії $\boldsymbol{e}_i$ базису Кліффорда. Цей простір має евклідову метрику з ортогональними базисними векторами і не підпадає під класичне визначення спін-простору [21], яке має антисиметричну метрику на ізотропних базисних векторах. Разом з тим, $\mathcal{E}_2^{++}$ має певну схожість з властивостями класичного спін-простору. Це стосується ідентичності виразів для перетворень координат і їх знакової неоднозначності. Однак введення операції сполучення базису Кліффорда на етапі його побудови дозволило в певному сенсі вирішити проблему неоднозначності перетворень.

2. Послідовне застосування в алгебрі Кліффорда векторного формалізму комплексних чисел дозволило перевизначити скалярний добуток для базису Кліффорда і коректно ввести для гіперболічних гіперкомплексних чисел метричний тензор $g_{\alpha\beta}$ ортогонального базису простору Мінковського $M_4^{(3)}$. Для цього простору отримано умови h-аналітичності функцій від гіперкомплексного аргументу, аналогічні умовам Коші–Рімана комплексних чисел. При цьому в умовах h-аналітичності в неявному вигляді присутні рівняння Максвелла для 4-потенціалу у вільному просторі.

3. У векторному трактуванні гіперкомплексних чисел важливу роль виконує орієнтація системи координат. Зміні орієнтації системи базисних векторів гіперкомплексних чисел відповідає операція сполучення в комплексних числах. Побудова інваріанта або модуля комплексного числа як композиції сполучених чисел відповідає для гіперкомплексних чисел композиції чисел в лівій і правій орієнтації системи координат. Саме на підставі цих міркувань і отримано умови h-аналітичності. Облік орієнтації систем координат дозволив також розрізнити праві і ліві кватерніони, тим самим підкреслюючи векторний характер алгебри Кліффорда.

Дякую професору В.І. Висоцькому за цінні зауваження та обговорення, які дозволили розглянути цю роботу під іншим кутом зору.

1. Ю.С. Владимиров, *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1* (Изд. МГУ, Москва 1996); Часть 2, (Изд. МГУ, Москва 1998).
2. А.П. Ефремов, *Кватернионные пространства, системы отсчета и поля* (Изд. РУДН, Москва, 2005).
3. А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев, *Кватернионы в релятивистской физике* (Едиториал, УРСС, 2003).
4. D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics* (Kluwer Academic, New York, 2002).
5. D. Hestenes, *Clifford Algebra to Geometric Calculus* (D. Reidel, Dordrecht, 1987).
6. H. Weyl, *Symmetry* (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956).
7. Sh.-T. Yau and S. Nadis, *The Shape of Inner Space: String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions* (Basic Books, New York, 2010), p. 151.
8. А.Н. Капустин, Д.О. Орлов, Успехи математических наук **59**, вып. 5(359), 101 (2004).
9. É. Cartan, *Leçons sur la Théorie des Spineurs* (Hermann, Paris, 1938).
10. П.К. Рашевский, Успехи математических наук **10**, вып. 2(64), 110, (1955).
11. И.М. Яглом, *Комплексные числа и их применение в геометрии* (Издательство Физико-математической литературы, Москва, 1963).
12. E. Hitzer, SICE J. Control Meas. **4**, 1 (2011).
13. Д.Г. Павлов, С.С. Кокарев, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике **7**, вып. 1(13), 78 (2010).
14. Д.Г. Павлов, С.С. Кокарев, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике **7**, вып. 2(14), 11 (2010).
15. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time, Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).
16. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели* (Наука, Москва, 1973).

17. D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus, A Unified Language for Mathematics and Physics* (Kluwer, Dordrecht, 1984).
18. С.В. Терехов, Вестник Новгородского Государственного Университета, № 26, 56 (2004).
19. А.Л. Глебов, Теоретическая и математическая физика **48**, № 3, 340 (1986).
20. Е. Вигнер, Успехи физических наук **83**, вып. 4, 729 (1964).
21. Ю.Б. Румер, *Спинорный анализ* (Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, Москва, 1936).
22. V.I. Vysotskii and M V. Vysotskyy, Eur. Phys. J. A **44**, 279 (2010).

Одержано 27.05.14

Ю.В. Хорошков

ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ
КАК ОСНОВА ПОСТРОЕНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО
КОНТИНУУМА

Р е з ю м е

С помощью зеркального отражения 1-мерного ориентированного множества в специально созданном на основе симметрии комплексном пространстве строится в зазеркалье пространство размерности $n > 1$. Геометрия полученного пространства описывается алгеброй Клиффорда. На основе алгебры гиперболических гиперкомплексных чисел строится псевдоевклидовое пространство с метрикой пространства Минковского. Получены условия аналитичности функции от гиперболического гиперкомплексного аргумента (h-аналитичность), в которых в неявном виде содержатся уравнения Максвелла для 4-потенциала в свободном прстранстве.

Yu. V. Khoroshkov

MIRROR SYMMETRY
AS A BASIS FOR CONSTRUCTING
A SPACE-TIME CONTINUUM

S u m m a r y

By mirroring a one-dimensional oriented set in a complex space specially created on the basis of a symmetry, a mirror n-dimensional space with $n > 1$ has been constructed. The geometry of the resulting space is described by the Clifford algebra. On the basis of the algebra of hyperbolic hypercomplex numbers, a pseudo-Euclidean space has been constructed with the metric of the Minkowski space. The conditions for a function of a hyperbolic hypercomplex argument to be analytic (h-analyticity) are obtained. The conditions implicitly contain the Maxwell equations for the 4-potential in a free space.