

**ТОЧНІ РІВНЯННЯ МАТІСОНА–ПАПАПЕТРУ
ДЛЯ МЕТРИКИ ШВАРЦШИЛЬДА
З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕГРАЛІВ
РУХУ**

Р.М. ПЛЯЦКО, О.Б. СТЕФАНИШИН

**Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України**

(Вул. Наукова, 3-б, Львів 79060; e-mail: plyatsko@lms.lviv.ua)

УДК 531.5
©2011

Отримано нове представлення точних рівнянь Матісона–Папапетру за умови Матісона–Пірані у гравітаційному полі Шварцшильда, що не містить третіх похідних від координат частинки зі спіном. Для цього використано інтеграли енергії та моменту кількості руху частинки, а також одне диференціальне співвідношення, яке впливає з рівнянь Матісона–Папапетру для довільної метрики. Запис рівнянь адаптовано для їх комп'ютерного інтегрування з метою подальших досліджень впливу взаємодії спіну частинки з кривизною простору-часу на її поведінку в гравітаційному полі без обмежень на швидкість і орієнтацію спіну.

від 1 до 4, а латинські – 1, 2, 3). Система (1), (2) має назву рівнянь Матісона–Папапетру (МП), при тому, що після публікацій [1, 2] їх отримували інші автори різними методами. Зокрема, багато уваги цим рівнянням і їх узагальненням, що враховують квадрупольний момент частинки, приділив Діксон [3], і тому нерідко їх ще називають рівняннями Матісона–Папапетру–Діксона.

Система рівнянь (1), (2) неповна, й тому фіксація початкових значень координат, швидкості і спіну не виділяє її єдиного розв'язку. Це пов'язано з тим, що рівняння (1), (2) є саме такими без конкретизації точки, відносно якої обчислюється кутовий момент частинки (тіла) і рух якої описує переміщення тіла в просторі як цілого. Звичайно, коли йдеться про кутовий момент, що характеризує обертання частинки відносно власної осі, природно за таку репрезентативну точку вибрати центр маси частинки. Однак відомо, що в релятивістській механіці розташування центра маси тіла, яке обертається відносно своєї осі, залежить від системи відліку [4]. Тому співвідношення

$$S^{\lambda\nu} u_\nu = 0, \tag{3}$$

нерелятивістський аналог якого ідентифікує центр маси тіла, за умов релятивізму виділяє не одну точку-центр, а множину центрів маси [5]. Як наслідок, рівняння (1)–(3) у просторі Мінковського поряд із розв'язками, що описують прямолінійні рухи, мають ще й розв'язки у вигляді спіральних (зокрема колових) ліній [6, 7]. Однак такого роду зайві розв'язки відсутні, якщо замість умови (3) використати спів-

1. Вступ

Рівняння, що описують рух макроскопічної частинки зі спіном (тіла, що обертається) у гравітаційному полі в рамках загальної теорії відносності, мають вигляд [1, 2]:

$$\frac{D}{ds} \left(m u^\lambda + u_\mu \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} \right) = -\frac{1}{2} u^\pi S^{\rho\sigma} R^\lambda_{\pi\rho\sigma}, \tag{1}$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{ds} + u^\mu u_\sigma \frac{DS^{\nu\sigma}}{ds} - u^\nu u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} = 0, \tag{2}$$

де $u^\lambda \equiv dx^\lambda/ds$ – 4-швидкість частинки, $S^{\mu\nu}$ – її тензор спіну, m і D/ds – відповідно маса і коваріантна похідна, $R^\lambda_{\pi\rho\sigma}$ – тензор Рімана кривизни простору-часу. (Використовується система одиниць, у якій гравітаційна стала та швидкість світла у вакуумі чисельно дорівнюють 1; у межах статті прийнято позначення, згідно з якими грецькі індекси пробігають значення

відношення

$$S^{\lambda\nu} P_\nu = 0, \quad (4)$$

де

$$P^\nu = mu^\nu + u_\lambda \frac{DS^{\nu\lambda}}{ds} \quad (5)$$

є чотириімпульсом частинки [3, 8]. (Традиційно співвідношення (3) в контексті рівнянь МП називають умовою Пірані, маючи на увазі публікацію [9], хоча її застосував ще Магісон [6]).

Якщо швидкість частинки зі спіном відносно джерела гравітаційного поля не дуже близька до швидкості світла й саме поле не надто сильне, розв'язки рівнянь МП за умов (3) і (4) відрізняються між собою дуже мало [10, 11]. (Йдеться про ті розв'язки за умови (3), що не належать до типу спіральних, а описують рух власного центра маси [4]; власною системою відліку є та, у якій вісь обертання нерухома). За цих самих умов дуже малим є відхилення світових ліній частинки зі спіном від геодезійних.

Якщо ж швидкість частинки зі спіном достатньо близька до світлової, картина змінюється. По-перше, виникають ситуації, коли розв'язки рівнянь (1), (2) за умов (3) і (4) залишаються близькими між собою, однак дуже відрізняються від відповідних розв'язків рівнянь геодезійних ліній. Такими прикладами є світові лінії і траєкторії ультрарелятивістської частинки зі спіном, що починає рух у вузькій просторовій області поблизу $r = 1,5r_g$ в полі Шварцшильда (r_g – шварцшильдівський радіус горизонту) [12] або поблизу $r = r_{\text{ph}}^{(-)}$ у полі Керра ($r_{\text{ph}}^{(-)}$ – радіус фотонної геодезійної орбіти у випадку контр-обертання) [13]. По-друге, за інших початкових умов траєкторії ультрарелятивістської частинки при їх описі рівняннями (1), (2) за обох співвідношень (3) і (4) можуть суттєво відрізнитись як між собою, так і від геодезійних траєкторій, і тут важливий вплив нелінійних за спіном членів [14]. Тоді виникає питання про адекватність тієї чи іншої з умов (3) і (4) для опису ультрарелятивістських рухів частинки зі спіном у гравітаційному полі загалом. До речі, щодо аналогічного питання в контексті вивчення світових ліній частинок зі спіном і нульовою масою на базі рівнянь типу МП зроблено висновок, що тут, імовірно, єдиною фізично змістовною умовою є (3) [15]. Чи з цього висновку випливає, що не тільки безмасова частинка зі спіном, яка рухається зі швидкістю світла, але й частинка з ненульовою масою і швидкістю дуже близькою до світлової, може бути коректно описана саме за умови (3), а не

(4)? Аргументовану відповідь можна отримати лише після аналізу тих розв'язків точних рівнянь (1), (2) за умови (3), які характеризують рухи власного центра маси (тобто не є осциляційними в сенсі [6, 7]) і їх порівняння з відповідними розв'язками цих же рівнянь за умови (4).

Дослідження розв'язків рівнянь (1), (2) за різних додаткових співвідношень у конкретних гравітаційних полях започатковані в [16] для метрики Шварцшильда й продовжені в багатьох публікаціях для цієї та інших метрик [5, 14, 17–27]. Висвітленню фізичних ефектів, зумовлених взаємодією спіну з гравітаційним полем згідно з рівняннями МП, приділено значну увагу у роботах [28, 29]. Зростає інтерес до вивчення фізичних наслідків рівнянь МП за останні 10–12 років [30–46]. Зокрема, в [31] продовжено розпочате в [25] дослідження можливостей проявів хаосу в динамічних системах за рахунок спіну; публікації [38–40, 42, 45] присвячені спіновим ефектам на колових орбітах, у тому числі явищу прецесії спіну [39, 42], а [33–35] – “ефекту годинника”. При цьому увагу приділено переважно аналізові фізичних ефектів, що впливають з цих рівнянь у відносно слабких гравітаційних полях за невеликої (порівняно зі світловою) швидкості руху частинки зі спіном відносно джерела гравітаційного поля.

Точні рівняння МП (1), (2) з умовою (3) містять треті похідні від координат частинки і є складною системою звичайних суттєво нелінійних диференціальних рівнянь навіть у відносно простому випадку центрально-симетричної метрики Шварцшильда. Для отримання їх розв'язків необхідне числове комп'ютерне інтегрування. Цьому передують вибір зручного представлення цих рівнянь шляхом виконання відповідних аналітичних перетворень. Можливість такого представлення у випадку метрик Шварцшильда та Керра забезпечується тим, що для них рівняння МП мають інтеграли руху – енергії та моменту кількості руху [17, 20, 47]. Як на певну аналогію вкажемо на відомий підхід до вивчення розв'язків рівнянь геодезійних ліній у метриках Шварцшильда та Керра, коли їх інтеграли енергії та моменту кількості руху ефективно використовуються для аналізу й класифікації можливих типів орбіт безспінової частинки у цих метриках [48, 49], оскільки стає можливим зведення задачі до розгляду рівнянь з порядком диференціювання на одиницю меншим, ніж вихідні рівняння геодезійних ліній. У випадку рівнянь (1)–(3) подібну процедуру було використано в [14] для рухів частинки зі спіном в екваторіальній площині $\theta = \pi/2$

метрики Шварцшильда, коли спін ортогональний до неї. За таких рухів спінова частина рівнянь МП (2) інтегрується незалежно від (1), що неможливо для загальних рухів, коли спін змінює орієнтацію й орбіта перестає бути плоскою. Тобто, для досягнення стратегічної мети – аналізу та класифікації можливих орбіт частинки зі спіном у полях Шварцшильда та Керра недостатньо результатів, отриманих в [14]. Тому першочерговим завданням є їх узагальнення на випадки неплоских рухів з довільно орієнтованим спіном як у полі Шварцшильда, так і в полі Керра.

Виконання цього завдання пов'язане із складними аналітичними обчисленнями, особливо для метрики Керра – відомо, наскільки ускладнюються обчислення уже для рівнянь геодезійних ліній у метриці Керра порівняно з випадком метрики Шварцшильда, а для рівнянь МП відмінність ще суттєвіша. Тому подальші дослідження доцільно розбити на два етапи: спочатку отримати представлення рівнянь МП (1)–(3) без третіх похідних від координат частинки для довільних рухів у полі Шварцшильда, після чого реалізувати подібну процедуру для поля Керра. При цьому рівняння, отримані на першому етапі, буде використано для перевірки відповідних рівнянь для поля Керра, оскільки при покладанні внутрішнього кутового моменту джерела поля рівним нулеві керрівський набір рівнянь повинен переходити у шварцшильдівський. Моніторинг виконання такого граничного переходу на всіх стадіях аналітичних обчислень дасть змогу підвищити їх достовірність.

Метою цієї роботи є виконання першого з вказаних етапів дослідження, а саме – узагальнення представлення точних рівнянь МП (1), (2) з умовою (3) через інтеграли енергії та моменту кількості руху, отриманого в [14] для плоских рухів частинки зі спіном у полі Шварцшильда, на довільні рухи в цьому ж полі з ілюстрацією окремих розв'язків цих рівнянь, одержаних їх комп'ютерним інтегруванням. Узагальненню цих результатів на випадок гравітаційного поля Керра буде присвячена інша публікація.

Відомо, що рівняння МП (1), (2) у полі Керра мають два вектори Кіллінга ξ , які в координатах Бойера–Ліндквіста записуються як $\xi^t = \partial/\partial t$, $\xi^\varphi = \partial/\partial\varphi$ [31]. Цим векторам відповідає два інтеграли руху – енергії E та z -компоненти моменту кількості руху J_z [17, 20, 31, 47]:

$$E = P_t - \frac{1}{2}g_{t\mu,\nu}S^{\mu\nu}, \quad J_z = -P_\varphi + \frac{1}{2}g_{\varphi\mu,\nu}S^{\mu\nu}.$$

У випадку поля Шварцшильда ці вирази з урахуванням співвідношення (5) набувають вигляду

$$E = mu_4 + g_{44}u_\mu \frac{DS^{4\mu}}{ds} + \frac{1}{2}g_{44,\mu}S^{\mu 4}, \quad (6)$$

$$J_z = -mu_3 - g_{33}u_\mu \frac{DS^{3\mu}}{ds} - \frac{1}{2}g_{33,\mu}S^{\mu 3} \quad (7)$$

(тут і надалі використовуємо метрику в стандартних шварцшильдівських координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$ із сигнатурою $-, -, -, +$).

На відміну від аксіально-симетричного поля Керра, центрально-симетричне поле Шварцшильда характеризується ще двома додатковими векторами Кіллінга, які забезпечують збереження компонент моменту кількості руху J_x і J_y , явні вирази яких подано, наприклад, у роботі [25].

Як зазначено вище, представлення рівнянь МП (1)–(3) через інтеграли руху в полі Шварцшильда є першим етапом досліджень, спрямованих на розв'язання складнішої задачі – отримання аналогічного представлення для довільних рухів частинки зі спіном у полі Керра. У зв'язку з цим звернемо увагу на дві обставини: 1) представлення рівнянь МП у полі Керра через інтеграли руху міститиме лише E , J_z , оскільки J_x , J_y не є сталими величинами у цьому полі; 2) внаслідок обчислювальних труднощів у випадку поля Керра важливо на всіх етапах обчислень здійснювати перевірку виконання граничного переходу до шварцшильдівського випадку. Тому для поля Шварцшильда важливо отримати таке представлення рівнянь МП (1)–(3), яке міститиме (як у випадку поля Керра) лише інтеграли E , J_z без залучення J_x , J_y .

Підкреслимо нетривіальність самого узагальнення процедури виключення з рівнянь МП за умови (3) третіх похідних від координат частинки, застосованої в [14] для плоских рухів у полі Шварцшильда, на довільні рухи в полі Керра. Виявляється, що для такого узагальнення необхідно не тільки використати інтеграли руху, а й врахувати одне диференціальне співвідношення, яке випливає з (1)–(3) (у випадку плоских рухів воно стає тривіальною тотожністю). Це співвідношення важливе тим, що на відміну від самих рівнянь МП воно не містить жодної третьої похідної від координат. Тому розпочнемо з отримання цього співвідношення, причому в загальному вигляді для довільної метрики. Тобто воно має самостійне значення й може використовуватися при аналізі розв'язків рівнянь (1)–(3) не тільки в полі Шварцшильда чи Керра.

Зацікавлення дослідженнями фізичних наслідків, які випливають із рівнянь МП, посилюється тим, що вони у певному сенсі є класичним наближенням загальноковаріантного рівняння Дірака [50] і можуть застосовуватись до вивчення закономірностей поведінки високоенергетичних спінових частинок зі складу космічних променів поблизу компактних астрофізичних об'єктів (чорних дірок, квазарів та ін).

2. Одне співвідношення, що впливає з рівнянь (1)–(3)

Розглянемо перші три рівняння підсистеми (1) з індексами $\lambda = 1, 2, 3$. Домножимо кожне з них, відповідно, на S^{23} , S^{31} , S^{12} і додамо їх, внаслідок чого отримуємо

$$m\varepsilon_{ikl}S^{ik}\frac{Du^l}{ds} + \frac{D}{ds}\left(\varepsilon_{ikl}S^{ik}u_\mu\frac{DS^{l\mu}}{ds}\right) - \varepsilon_{ikl}\frac{DS^{ik}}{ds}u_\mu\frac{DS^{l\mu}}{ds} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}S^{ik}u^\pi S^{\rho\sigma}R^l{}_{\pi\rho\sigma} \quad (8)$$

(зазначимо, що за умови (3) величина m в (1) є сталою). Покажемо, що кожна з двох груп доданків у (8) вигляду

$$\varepsilon_{ikl}S^{ik}u_\mu\frac{DS^{l\mu}}{ds}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{ikl}\frac{DS^{ik}}{ds}u_\mu\frac{DS^{l\mu}}{ds} \quad (10)$$

за умови (3) тотожно дорівнює нулеві. Справді, наслідком коваріантного диференціювання умови (3) є співвідношення

$$u_\mu\frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} + S^{\lambda\mu}\frac{Du_\mu}{ds} = 0. \quad (11)$$

Враховуючи (11), вираз (9) запишемо так:

$$\varepsilon_{ikl}S^{ik}S^{l4}\frac{Du_4}{ds} \quad (12)$$

(тут враховано, що множники при Du_i/ds , де $i = 1, 2, 3$, тотожно дорівнюють нулеві внаслідок антисиметрії тензора спіну). Для оцінки виразу у круглих дужках правої частини (12) врахуємо, що безпосередньо з умови (3) випливають співвідношення

$$S^{i4} = \frac{1}{u_4}S^{li}u_l \quad (13)$$

внаслідок чого маємо

$$\varepsilon_{ikl}S^{ik}S^{l4} = 0, \quad (14)$$

що також є наслідком антисиметрії тензора спіну. Отже, вираз (9) тотожно дорівнює нулеві.

Для оцінки виразу (10) використаємо співвідношення, що безпосередньо випливають із підсистеми рівнянь (2):

$$\varepsilon_{ikl}\frac{DS^{kl}}{ds} = \varepsilon_{ikl}u_\mu\frac{DS^{k\mu}}{ds}u^l - \varepsilon_{ikl}u_\mu\frac{DS^{l\mu}}{ds}u^k. \quad (15)$$

Підставляючи (15) в (10), знаходимо

$$\varepsilon_{ikl}\left(u_\nu\frac{DS^{i\nu}}{ds}u^k - u_\nu\frac{DS^{k\nu}}{ds}u^i\right)u_\mu\frac{DS^{l\mu}}{ds} = \varepsilon_{ikl}u^i u_\mu u_\nu\left(\frac{DS^{k\mu}}{ds}\frac{DS^{l\nu}}{ds} - \frac{DS^{l\mu}}{ds}\frac{DS^{k\nu}}{ds}\right) = 0, \quad (16)$$

оскільки тут кожен з доданків містить згортку симетричного тензора $u_\mu u_\nu$ із антисиметричними за індексами μ і ν виразами у круглих дужках.

Отже, внаслідок (12), (14), (16) співвідношення (8) набуває вигляду

$$m\varepsilon_{ikl}S^{ik}\frac{Du^l}{ds} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}S^{ik}u^\pi S^{\rho\sigma}R^l{}_{\pi\rho\sigma}. \quad (17)$$

Замість просторових компоненти тензора спіну зручно використовувати трикомпонентну величину S_i таку, що [14, 40]:

$$S_i = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\varepsilon_{ikl}S^{kl}, \quad S^{kl} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{kli}S_i \quad (18)$$

де g – визначник метричного тензора, ε^{klm} – символ Леві-Чівіти. Зазначимо, що при розгляді рівнянь МП поряд з тензором спіну $S^{\lambda\mu}$ у літературі широко використовується 4-вектор спіну s_λ . Найвний простий зв'язок між S_i та s_λ : $S_i = u_i s_4 - u_4 s_i$ [14]. Звідси випливає, що у системі координат, пов'язаній із супутнім до частинки спостерігачем, коли $u^i = 0$, $s_4 = 0$, компоненти S_i пропорційні до просторових компонент 4-вектора спіну s_i . У подальшому ми використовуємо саме величину S_i , оскільки вона забезпечує компактніший запис відповідних рівнянь. Із врахуванням (18) співвідношення (17) набуває вигляду

$$mS_i\frac{Du^i}{ds} = -\frac{1}{2}u^\pi S^{\rho\sigma}S_j R^j{}_{\pi\rho\sigma}. \quad (19)$$

Підкреслимо, що на відміну від рівнянь підсистеми (1), кожне з яких за умови (3) містить треті похідні від координат, співвідношення (19) має похідні не вище другого порядку.

3. Точна система рівнянь МП другого порядку за координатами для метрики Шварцшильда

Передусім конкретизуємо співвідношення (19) для випадку метрики Шварцшильда. У стандартних координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$ відмінними від нуля є такі компоненти метричного тензора і тензора Рімана [48]:

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2,$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (20)$$

$$R_{1212} = \frac{M}{r-2M}, \quad R_{1313} = \frac{M}{r-2M} \sin^2 \theta,$$

$$R_{2323} = -2Mr \sin^2 \theta, \quad R_{4141} = \frac{2M}{r^3},$$

$$R_{4242} = \frac{M(2M-r)}{r^2}, \quad R_{4343} = \frac{M(2M-r)}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (21)$$

Враховуючи (18), (20), (21), співвідношення (19) запишемо як

$$m\sqrt{-g}S_i \frac{Du^i}{ds} = 6S_1(R_{313}^1 S_2 u^3 - R_{212}^1 S_3 u^2). \quad (22)$$

Зазначимо, що у частковому випадку рухів частинки в екваторіальній площині $\theta = \pi/2$ поля Шварцшильда, для яких характерна рівність нулеві компонент спіну S_1 і S_3 , ліва і права частини співвідношення (22) тотожно дорівнюють нулеві. Однак для загальних рухів співвідношення (22) нетривіальне і, як покажемо нижче, воно відіграє важливу роль в отриманні замкнутої системи диференціальних рівнянь другого порядку за координатами частинки, які містять інтеграли руху E і J_z як параметри.

Подальші перетворення співвідношення (22) здійснимо з використанням інтегралів руху (6), (7). Зокрема, із співвідношення для E , яке впливає з (6) після врахування (20), виразимо похідну Du^3/ds через Du^1/ds і Du^2/ds :

$$\frac{Du^3}{ds} = (S_2 u_1 - S_1 u_2)^{-1} g^{33} \left[g_{11} (S_2 u_3 - S_3 u_2) \frac{Du^1}{ds} + \right.$$

$$\left. + g_{22} (S_3 u_1 - S_1 u_3) \frac{Du^2}{ds} + m u_4 u^4 \sqrt{-g} - \right.$$

$$\left. - E u^4 \sqrt{-g} + \frac{g_{44,1}}{2g_{44}} (S_2 u_3 - S_3 u_2) \right]. \quad (23)$$

Аналогічно з виразу для J_z , що впливає із (7), виразимо Du^4/ds також через Du^1/ds і Du^2/ds :

$$\frac{Du^4}{ds} = (S_2 u_1 - S_1 u_2)^{-1} u^4 \left(g_{11} S_2 \frac{Du^1}{ds} - g_{22} S_1 \frac{Du^2}{ds} - \right.$$

$$\left. - m u^3 \sqrt{-g} - J g^{33} \sqrt{-g} + \frac{g_{33,1}}{2g_{33}} S_2 - \frac{g_{33,2}}{2g_{33}} S_1 \right). \quad (24)$$

Підставляючи вирази (23), (24) в (22), отримуємо

$$[S_1 g_{33} (S_2 u_1 - S_1 u_2) + S_3 g_{11} (S_2 u_3 - S_3 u_2)] \frac{Du^1}{ds} +$$

$$+ [S_2 g_{33} (S_2 u_1 - S_1 u_2) + S_3 g_{22} (S_3 u_1 - S_1 u_3)] \frac{Du^2}{ds} +$$

$$+ S_3 [m u_4 u^4 \sqrt{-g} - E u^4 \sqrt{-g} + \frac{g_{44,1}}{2g_{44}} (S_2 u_3 - S_3 u_2)] +$$

$$+ \frac{6S_1 g_{33}}{m \sqrt{-g}} (S_2 u_1 - S_1 u_2) (R_{212}^1 S_3 u^2 - R_{313}^1 S_2 u^3) = 0. \quad (25)$$

Згадаємо, що рівняння МП у загальному випадку довільної метрики мають інтеграл руху

$$u_\mu u^\mu = \text{const} \quad (26)$$

(звичай записують $u_\mu u^\mu = 1$, вибираючи відповідний вибір масштабу часу), як, до речі, й рівняння геодезійних ліній. Наслідком коваріантного диференціювання співвідношення (26) є

$$u_1 \frac{Du^1}{ds} + u_2 \frac{Du^2}{ds} + u_3 \frac{Du^3}{ds} + u_4 \frac{Du^4}{ds} = 0. \quad (27)$$

Підставляючи вирази (23), (24) для коваріантних похідних Du^3/ds і Du^4/ds в (27), отримуємо співвідношення, в яке входять лише похідні Du^1/ds і Du^2/ds :

$$g_{11} (S_2 - u_2 S_i u^i) \frac{Du^1}{ds} - g_{22} (S_1 - u_1 S_i u^i) \frac{Du^2}{ds} -$$

$$- E u^3 u^4 \sqrt{-g} + \frac{g_{44,1}}{2g_{44}} u^3 (S_2 u_3 - S_3 u_2) +$$

$$u_4 u^4 g^{33} (-J \sqrt{-g} + \frac{1}{2} g_{33,1} S_2 - \frac{1}{2} g_{33,2} S_1) = 0. \quad (28)$$

Безпосередньою підстановкою (23), (24) з урахуванням (25), (28) в чотири рівняння підсистеми МП (1) неважко переконатись, що всі ці рівняння задовольняються тотожно.

Отже, рівняння (25), (28) складають систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно Du^1/ds і Du^2/ds і з них неважко знайти (якщо не зважати на деяку громіздкість обчислень) вирази для Du^1/ds і Du^2/ds через координати, компоненти швидкості та спіну частинки, а тим самим і вирази для звичайних похідних du^1/ds і du^2/ds після врахування явного вигляду символів Крістофеля для метрики (20). Врешті, використовуючи ці вирази для du^1/ds і du^2/ds , з (23), (24) отримуємо відповідні вирази для du^3/ds і du^4/ds . Таким чином, приходимо до системи чотирьох диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{du^\lambda}{ds} = f_\lambda(x^\mu, u^\nu, S_i), \quad \lambda = 1, 2, 3, 4, \quad (29)$$

де f_λ – відповідні функції. Явний вигляд цих функцій тут не подаємо задля стислості викладу, оскільки замість системи чотирьох рівнянь другого порядку відносно координат x^λ , якою є (29), зручно (зокрема в комп'ютерних обчисленнях) розглядати систему восьми рівнянь першого порядку для восьми невідомих функцій y_i , пов'язаних з координатами і швидкістю частинки так, щоб вони відповідали безрозмірним величинам, а саме за означенням

$$y_1 = \frac{r}{M}, \quad y_2 = \theta, \quad y_3 = \varphi, \quad y_4 = \frac{t}{M}, \quad (30)$$

$$y_5 = u^1, \quad y_6 = Mu^2, \quad y_7 = Mu^3, \quad y_8 = u^4.$$

Крім цього, введемо ще безрозмірні величини, пов'язані з компонентами S_i :

$$y_9 = \frac{S_1}{mM}, \quad y_{10} = \frac{S_2}{mM^2}, \quad y_{11} = \frac{S_3}{mM^2}, \quad (31)$$

а також з власним часом частинки s , абсолютною величиною спіну S й інтегралом енергії E моменту кількості руху J_z :

$$x = \frac{s}{M}, \quad \varepsilon = \frac{S}{Mm}, \quad \mu = \frac{ME}{S}, \quad \nu = \frac{J_z}{S}. \quad (32)$$

Як відомо, в загальному випадку довільної метрики рівняння МП мають інтеграл руху $S^2 = \frac{1}{2}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$. Тоді згадані вісім диференціальних рівнянь для восьми функцій y_i відповідно з (29) набувають вигляду

$$\dot{y}_1 = y_5, \quad \dot{y}_2 = y_6, \quad \dot{y}_3 = y_7, \quad \dot{y}_4 = y_8,$$

$$\dot{y}_5 = A_1, \quad \dot{y}_6 = A_2, \quad \dot{y}_7 = A_3, \quad \dot{y}_8 = A_4, \quad (33)$$

(крапка над буквою позначає звичайне диференціювання за x), де вирази для A_i є такими:

$$A_1 = A + \left(y_1 y_6^2 + y_1 y_7^2 \sin^2 y_2 - \frac{y_8^2}{y_1^2} \right) q + \frac{y_5^2}{y_1^2} q^{-1},$$

$$A_2 = B - \frac{2}{y_1} y_5 y_6 + y_7^2 \sin y_2 \cos y_2,$$

$$A_3 = (-q^{-1} y_5 y_{10} + y_1^2 y_6 y_9)^{-1} \times [q^{-1} (-y_7 y_{10} \sin^2 y_2 + y_6 y_{11}) A + (-q^{-1} y_5 y_{11} + y_1^2 y_7 y_9 \sin^2 y_2) B - y_8^2 q \sin y_2 + \mu y_8 \sin y_2 + \frac{1}{y_1^2} q^{-1} (y_7 y_{10} \sin^2 y_2 -$$

$$- y_6 y_{11})] \sin^{-2} y_2 - \frac{2}{y_1} y_5 y_7 - 2 y_6 y_7 \cot y_2,$$

$$A_4 = y_8 (-q^{-1} y_5 y_{10} + y_1^2 y_6 y_9)^{-1} \times [-q^{-1} y_{10} A + y_1^2 y_9 B - y_1^2 y_7 \sin y_2 + \frac{\nu}{\sin y_2} + \frac{y_{10}}{y_1} - y_9 \cot y_2] - \frac{2}{y_1^2} y_5 y_8 q^{-1},$$

$$A = \varepsilon^{-2} q^{-1} (q^{-1} y_5 y_{10} - y_1^2 y_6 y_9)^{-1} \times [y_7 (-y_5 y_{10}^2 y_1^{-2} + q y_9 (y_6 y_{10} + y_7 y_{11})) + \frac{y_{11}}{y_1^2 \sin^2 y_2} (q y_9 + y_5 (y_5 y_9 + y_6 y_{10}))] \times [y_1^2 q^{-1} \frac{\mu}{y_8} \sin y_2 + q^{-2} \frac{1}{y_8^2} (y_7 y_{10} \sin^2 y_2 - y_6 y_{11})] + \frac{1}{y_1^2} [y_5 y_{10}^2 + \frac{y_5 y_{11}^2}{\sin^2 y_2} - q y_1^2 y_9 (y_6 y_{10} + y_7 y_{11})] \times \left(\frac{\nu}{\sin y_2} + \frac{y_{10}}{y_1} - y_9 \cot y_2 \right)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\varepsilon^2 \sin^2 y_2} [y_9 + q^{-1} y_5 (y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_7 y_{11})] \times \\
& \times \left[\frac{6 y_9}{y_1^3 y_8^2} q^{-1} (-y_7 y_{10} \sin^2 y_2 + y_6 y_{11}) - \right. \\
& \left. - y_{11} (q^{-1} y_5 y_{10} - y_1^2 y_6 y_9)^{-1} \right], \\
B = & y_1^{-2} [y_9 + q^{-1} y_5 (y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_7 y_{11})]^{-1} \times \\
& \times [q^{-1} (y_{10} + y_1^2 y_6 (y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_7 y_{11})) A + \\
& + \mu y_1^2 y_7 y_8 \sin y_2 + q^{-1} y_7 (y_7 y_{10} \sin^2 y_2 - y_6 y_{11}) - \\
& - q y_8^2 (\nu \sin^{-1} y_2 + y_{10} y_1^{-1} - y_9 \cot y_2)]. \quad (34)
\end{aligned}$$

У записі виразів (34) використано позначення

$$q = 1 - \frac{2}{y_1}.$$

Для ще трьох функцій y_9, y_{10}, y_{11} маємо три рівняння, що випливають із спінової частини рівнянь МП й подані в [12]:

$$\dot{y}_9 = A_5, \quad \dot{y}_{10} = A_6, \quad \dot{y}_{11} = A_7, \quad (35)$$

де

$$\begin{aligned}
A_5 = & \frac{2 y_5 y_9}{y_1^2} q^{-1} + \frac{y_6 y_{10} + y_7 y_{11}}{y_1} - (y_5 y_9 + y_6 y_{10} + \\
& + y_7 y_{11}) \times \left[\left(A_1 - \frac{y_5 A_4}{y_8} - \frac{y_5^2}{y_1^2} q^{-1} \right) q^{-1} - y_1 y_6^2 - \right. \\
& \left. - y_1 y_7^2 \sin^2 y_2 + \frac{y_8^2}{y_1^2} \right] + \frac{y_9 A_4}{y_8}, \\
A_6 = & -y_1 y_6 y_9 \left(1 - \frac{3}{y_1} \right) + \frac{y_5 y_{10}}{y_1^2} (2q^{-1} + y_1) + \\
& + y_7 y_{11} \cot y_2 + \frac{y_{10} A_4}{y_8} - (y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_7 y_{11}) \times \\
& \times \left[y_1^2 A_2 - \frac{y_1^2 y_6}{y_8} A_4 + 2 y_5 y_6 (y_1 - q^{-1}) - \right.
\end{aligned}$$

$$\left. - y_1^2 y_7^2 \cos y_2 \sin y_2 \right],$$

$$\begin{aligned}
A_7 = & \frac{y_5 y_{11}}{y_1^2} (2q^{-1} + y_1) - y_1 y_7 y_9 \left(1 - \frac{3}{y_1} \right) \sin^2 y_2 + \\
& + y_6 y_{11} \cot y_2 - y_7 y_{10} \cos y_2 \sin y_2 + \frac{y_{11} A_4}{y_8} - \\
& - (y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_7 y_{11}) \times \left[y_1^2 A_3 \sin^2 y_2 - \frac{y_1^2 y_7}{y_8} A_4 \times \right. \\
& \times \sin^2 y_2 + 2 y_5 y_7 (y_1 - q^{-1}) \sin^2 y_2 + \\
& \left. + 2 y_1^2 y_6 y_7 \cos y_2 \sin y_2 \right]. \quad (36)
\end{aligned}$$

Отже, система рівнянь (33), (35) складає повну систему точних рівнянь МП, яка описує найбільш загальні рухи частинки зі спіном у гравітаційному полі без обмежень на швидкість та орієнтацію спіну. При цьому вирази для A_3, A_4, A, B містять величини μ і ν , пропорційні відповідно до інтегралів E і J_z згідно з означенням (32). Це означає, що фіксація початкових значень усіх функцій y_i ($i = 1, \dots, 11$) при розв'язуванні задачі Коші для рівнянь (33), (35) не виділяє єдиного розв'язку цих рівнянь, як і повинно бути для точних рівнянь МП за умови (3). Перебір значень параметрів μ і ν для фіксованих початкових значень y_i дає змогу описати рухи різних центрів маси частинки зі спіном. Серед множини пар значень μ і ν існує єдина, яка описує рухи власного центра маси. Як знайти цю пару μ і ν – окреме питання. Один із підходів для відповіді на нього сформульовано в [51], де запропоновано метод виділення неосциляційних розв'язків точних рівнянь МП за умови (3).

Аналіз загальних рухів, що описуються рівняннями (33), (35), вимагає детальних комп'ютерних обчислень, чому буде присвячена окрема публікація. Нижче як приклад розглянемо такі розв'язки цих рівнянь, для яких початкове значення радіальної координати дорівнює $3M = 1,5r_g$, а початкові значення компонент швидкості і вектора спіну близькі до тих, що властиві відомому точному розв'язку рівнянь МП за умови (3) у полі Шварцшильда, який описує ультрарелятивістську колову орбіту з $r = 1,5r_g$. Точніше, як і в [12, 13], дослідимо характер зміни цієї орбіти, якщо початково спін не є ортогональним до площини $\theta = \pi/2$ і радіальна компонента спіну дещо відмінна від нуля. Різниця в тому, що в [12, 13] брали до уваги рівняння МП лише в лінійному за спіном наближенні, тоді як тут розглядаємо точні рівняння МП (33), (35).

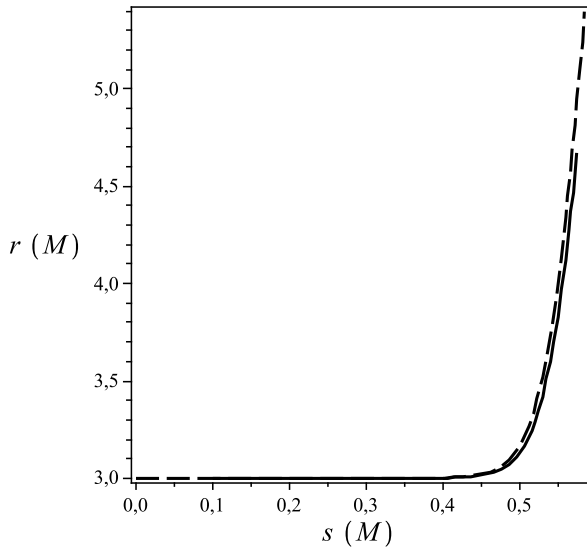


Рис. 1. Залежність r від s (в одиницях M) згідно з точними рівняннями МП (суцільна лінія) і їх лінійним за спіном наближенням (штрихова лінія)

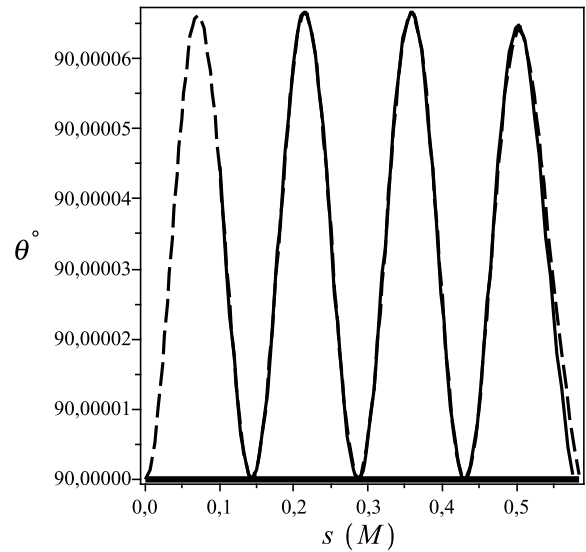


Рис. 2. Залежність кута θ від s згідно з точними рівняннями МП (суцільна лінія) і їх лінійним за спіном наближенням (штрихова лінія)

4. Приклад

Ультрарелятивістська колова орбіта з $r = 3M$ є спільним розв'язком точних рівнянь МП і їх лінійного за спіном наближення [12, 14]. На невеликому часовому інтервалі, від моменту сходження частинки з цієї орбіти за рахунок певної зміни її швидкості чи орієнтації спіну, значно переважає вплив лінійних членів порівняно з нелінійними спіновими членами [12, 13]. Для вивчення поведінки частинки на більших часових інтервалах не можна обмежуватись лінійними членами, а необхідно розв'язувати точну систему рівнянь МП (33), (35). При цьому, оскільки йдеться про продовження уже відомих розв'язків на більші часові інтервали, питання відбору тих значень параметрів μ і ν , які відповідають розв'язкам для власного центра маси, вирішується просто – за самим означенням інтегралів руху вони зберігаються незмінними від початку руху. Тому при комп'ютерному інтегруванні рівнянь (33), (35) для параметрів μ і ν , які наявні у виразах для A_3, A_4, A і B з (34), покладаємо ті значення, що в початковий момент визначаються лінійним за спіном наближенням.

Зазначимо, що безпосереднім наслідком виразу $S^2 = \frac{1}{2}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ з урахуванням (3), (18) і позначень (30)–(32) є співвідношення

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & q^{-2}y_8^{-2}[(y_5y_9 + y_6y_{10} + y_7y_{11})^2 + \\ & + qy_9^2 + y_{10}^2y_1^{-2} + y_{11}^2y_1^{-2}\sin^{-2}y_2]. \end{aligned} \quad (37)$$

При цьому внаслідок умови пробності частинки [18] абсолютна величина параметра ε , означеного в (32), мусить бути значно меншою від 1.

Як і в [12], співвідношення (37) врахуємо при зміні початкового нахилу спіну до екваторіальної площини $\theta = \pi/2$ за умови фіксованої абсолютної величини спіну. Крім цього, оскільки вираз у правій частині (37) є інтегралом руху, використаємо його для контролю точності комп'ютерних обчислень.

Коловій орбіті з $r = 3M$ відповідають такі початкові значення величин y_i [12]:

$$\begin{aligned} y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 0, \\ y_5(0) = 0, \quad y_6(0) = 0, \quad y_7(0) = u, \quad y_8(0) = v, \\ y_9(0) = 0, \quad y_{10}(0) = w, \quad y_{11}(0) = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

де

$$\begin{aligned} u = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{-1 + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 12}}{\varepsilon}}, \\ v = \sqrt{3}\sqrt{1 + 9u^2}, \quad w = \varepsilon v. \end{aligned} \quad (39)$$

На рис. 1–4 проілюстровано розв'язки рівнянь (33)–(35) з початковими умовами для більшості величин y_i

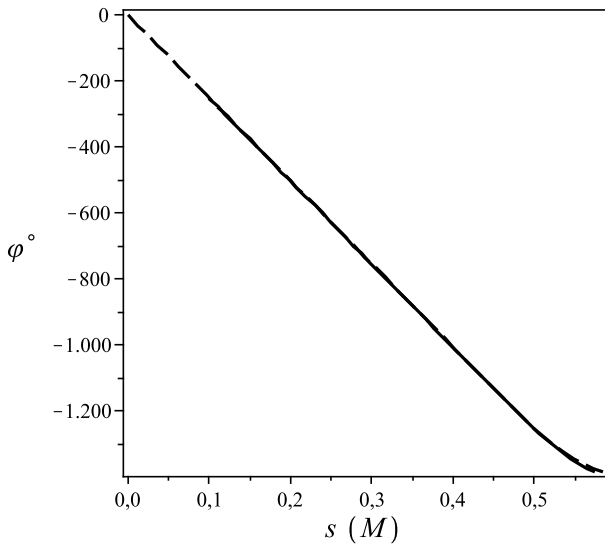


Рис. 3. Залежність φ від s згідно з точними рівняннями МП (суцільна лінія) і їх лінійним за спіном наближенням (штрихова лінія)

такими, як в (38), за винятком y_5, y_9, y_{10} – згідно з позначеннями (30) вони відповідають радіальній швидкості та двом компонентам 3-вектора спіну. Для y_5 покладемо мале початкове значення $3,9 \cdot 10^{-7}$, а y_9, y_{10} є такими, що забезпечують початковий кут нахилу спіну до екваторіальної площини 1° . Для параметра ε покладемо 10^{-4} . Ці конкретні значення вибрано як у певному сенсі типові й показові.

Згідно з рис. 1 залежність r від s є практично однаковою як за точними рівняннями МП, так і їх лінійним за спіном наближенням на часовому інтервалі від 0 до $0,5M$. Невелика різниця між відповідними кривими зберігається доти, доки зміщення за радіальною координатою досягне значення приблизно $5M$. Згідно із рис. 2, 3 подібна закономірність властива залежностям θ від s і φ від s . Більш наглядною є різниця ходу траєкторій частинки згідно з рис. 4. Точкова лінія на цьому рисунку зображає траєкторію безспінової частинки, яка рухається з тими самими початковими значеннями координат і швидкості, що й спінова частинка. При цьому безспінова частинка падає на поверхню горизонту у момент часу $s \approx 0,228M$.

5. Висновки

Отже, використання інтегралів руху точних рівнянь МП (1), (2) за умови (3) у полі Шварцшильда – енер-

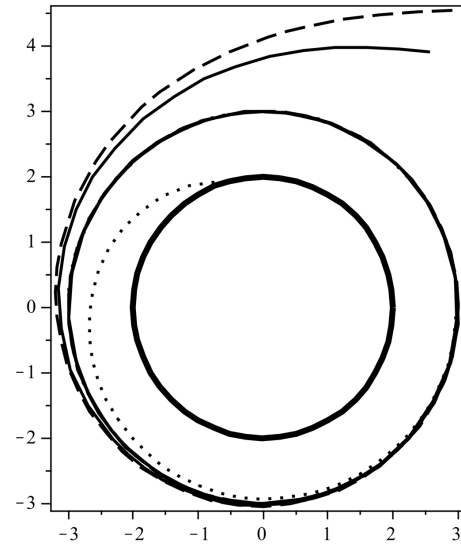


Рис. 4. Геодезійна траєкторія (точкова лінія) і траєкторії спінової частинки (суцільна лінія – згідно з точними рівняннями МП, штрихова – згідно з лінійним за спіном наближенням). Коло радіуса 2 відповідає поверхні горизонту

гії E і моменту кількості руху J_z , із залученням співвідношення (22), дало змогу отримати повну систему рівнянь (33), (35) для опису найбільш загальних рухів частинки зі спіном у цьому полі. Оскільки співвідношення (22) є частковим випадком загального співвідношення (19), такий підхід можна застосувати до інших гравітаційних полів, зокрема поля Керра, у якому також є відповідні інтеграли руху.

На рис. 1–4 показано, що як наближені (лінійні за спіном), так і точні рівняння МП допускають у полі Шварцшильда ефекти значної протидії взаємодії спіну з кривизною простору-часу звичайному притягання, властивому впливу гравітації на безспінову частинку.

Роботу частково підтримано Програмою НАН України “Космомікрофізика”.

1. M. Mathisson, Acta Phys. Polon. **6**, 163 (1937).
2. A. Papapetrou, Proc. R. Soc. A **209**, 248 (1951).
3. W.G. Dixon, Proc. R. Soc. A **314**, 499 (1970); Philos. Trans. A **217**, 59 (1974); Acta Phys. Polon. B Proc. Suppl. **1**, 27 (2008).
4. C. Möller, Commun. Dublin. Inst. Advan. Studies Ser. A **5**, 3 (1949).
5. B. Mashhoon, J. Math. Phys. **12**, 1075 (1971).

6. M. Mathisson, Acta Phys. Polon. **6**, 218 (1937).
7. J. Weyssenhoff and A. Raabe, Acta Phys. Polon. **9**, 7 (1947).
8. W. Tulczyjew, Acta Phys. Polon. **18**, 393 (1959).
9. F. Pirani, Acta Phys. Polon. **15**, 389 (1956).
10. B.M. Barker and R.F. O'Connell, Gen. Rel. Grav. **11**, 149 (1979).
11. А.Н. Александров, Кинем. физ. небес. тел **7**, 13 (1991).
12. Р.М. Пляцко, О.Б. Стефанишин, Журн. фіз. досл. **13**, 3 (2009).
13. R. Plyatsko, O. Stefanyshyn, and M. Fenyk, Phys. Rev. D **82**, 044015 (2010).
14. Р.М. Пляцко, *Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спин-орбітальної взаємодії* (Наук. думка, Київ, 1988).
15. B. Mashhoon, Ann. Phys. **89**, 254 (1975); D. Bini, C. Cherubini, A. Geralico, and R. T. Jantzen, Int. J. Mod. Phys. **15**, 737 (2006).
16. E. Corinaldesi and A. Papapetrou, Proc. R. Soc. A **209**, 258 (1951).
17. R. Micoulaut, Z. Phys. **206**, 394 (1967).
18. R. Wald, Phys. Rev. D. **6**, 406 (1972).
19. S. Rasband, Phys. Rev. Lett. **30**, 111 (1973).
20. K.P. Tod, F. de Felice, and M. Calvani, Nuovo Cim. B **34**, 365 (1976).
21. M. Carmeli, Ch. Charach, and M. Kaye, Phys. Rev. D. **15**, 1501 (1977).
22. M.A. Abramowicz and M. Calvani, Mon. Not. R. Astron. Soc. **189**, 621 (1979).
23. K. Svirskas, K. Pyragas, and A. Lozdiene, Astrophys. Space Sci. **149**, 39 (1988).
24. R. H. Rietdijk and van Holten, Class. Quantum Grav. **10**, 575 (1993).
25. S. Suzuki and K. Maeda, Phys. Rev. D **55**, 4848 (1997).
26. S. Suzuki and K. Maeda, Phys. Rev. D **58**, 023005 (1998).
27. O. Semerak, Mon. Not. R. Astron. Soc. **308**, 863 (1999).
28. О.С. Иваницкая, *Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения* (Наука и техника, Минск, 1979).
29. А.П. Рябушко, *Движение тел в общей теории относительности* (Высшая школа, Минск, 1979).
30. Ali M. Hossain and A. Mainuddin, Ann. Phys. **282**, 157 (2000).
31. M. Hartl, Phys. Rev. D **67**, 024005 (2003); Phys. Rev. D **67**, 104023 (2003).
32. Ali M. Hossain, Gen. Relativ. Gravitation **35**, 285 (2003).
33. D. Bini, F. de Felice, and A. Geralico, Classical Quantum Gravity **21**, 5427 (2004).
34. D. Bini, F. de Felice, and A. Geralico, Classical Quantum Gravity **21**, 5441 (2004).
35. S.B. Faruque, Phys. Lett. A **327**, 95 (2004).
36. L.M. Burko, Phys. Rev. D **69**, 044011 (2004).
37. C. Chicone, B. Mashhoon, and B. Punsly, Phys. Lett. A **343**, 1 (2005).
38. D. Bini, A. Geralico, and F. de Felice, Int. J. Mod. Phys. D **14**, 1793 (2005).
39. D. Bini, F. de Felice, A. Geralico, and R. T. Jantzen, Classical Quantum Gravity **22**, 2947 (2005).
40. R. Plyatsko, Classical Quantum Gravity **22**, 1545 (2005).
41. B. Mashhoon and D. Singh, Phys. Rev. D **74**, 124006 (2006).
42. D. Bini, F. de Felice, A. Geralico, and R. T. Jantzen, Classical Quantum Gravity **23**, 3287 (2006).
43. D. Singh, Phys. Rev. D **78**, 104028 (2008).
44. M. Mortazavimanesh and M. Mohseni, Gen. Relativ. Gravitation **41**, 2697 (2009).
45. M. Mohseni, Gen. Relativ. Gravitation **42**, 2477 (2010).
46. Yu. Obukhov and D. Puetzfeld, Phys. Rev. D **83**, 044024 (2011).
47. Я.М. Якупов, Аспирантские работы. Физика. Казан. ун-т, вып. **13**, 254 (1975).
48. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля* (Наука, Москва, 1973).
49. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, 1983).
50. S. Wong, Int. J. Theor. Phys. **5**, 221 (1972); L. Kannenberg, Ann. Phys. (N.Y.) **103**, 64 (1977); J. Audretsch, J. Phys. A **14**, 411 (1981); A. Gorbatsi-

evich, *Acta Phys. Polon. B* **17**, 111 (1986); A. Barut and M. Pavsic, *Class. Quantum Grav.* **4**, 41 (1987); F. Cianfrani and G. Montani, *Europhys. Lett.* **84**, 30008 (2008); *Int. J. Mod. Phys. A* **23**, 1274 (2008); Yu. Obukhov, A. Silenko, and O. Teryaev, *Phys. Rev. D* **80**, 064044 (2009).

51. R. Plyatsko and O. Stefanyshyn, *Acta Phys. Polon. B* **39**, 23 (2008).

Одержано 02.12.10

ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТИССОНА–ПАПАПЕТРУ
ДЛЯ МЕТРИКИ ШВАРЦШИЛЬДА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛОВ
ДВИЖЕНИЯ

Р.М. Пляцко, А.Б. Стефанышин

Резюме

Получено новое представление точных уравнений Матиссона–Папапетру с условием Матиссона–Пирани в гравитационном поле Шварцшильда, не содержащее третьих производных координат частицы со спином. Для этого использованы интегралы энергии и момента количества движения частицы, а также одно дифференциальное соотношение, следующее из уравнений Матиссона–Папапетру для произвольной метрики. Запись уравнений адаптирована для их компьютерного интегрирования с целью дальнейших исследований влияния взаимодей-

ствия спина частицы с кривизной пространства-времени на ее поведение в гравитационном поле без ограничений на скорость и ориентацию спина.

EXACT MATHISSON–PAPAPETROU EQUATIONS
IN THE SCHWARZSCHILD METRIC
WITH INTEGRALS OF MOTION

R.M. Plyatsko, O.B. Stefanyshyn

Ya.S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(3b, Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine;
e-mail: plyatsko@lms.lviv.ua)

S u m m a r y

A new representation for exact Mathisson–Papapetrou equations under the Mathisson–Pirani condition in the Schwarzschild gravitational field, which does not contain third-order derivatives with respect to spinning-particle coordinates, has been obtained. For this purpose, the integrals of energy and angular momentum of a spinning particle, as well as a differential relation following from the Mathisson–Papapetrou equations for an arbitrary metric, are used. The form of the equations obtained is adapted for their computer integration and further researches dealing with the influence of the spin-curvature interaction on particle's behavior in the gravitational field imposing no restrictions on the particle's velocity and spin orientation.