

# РОЗРАХУНКИ ХВИЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ $nd$ -СИСТЕМИ, ФАЗ І ПЕРЕРІЗІВ $nd$ -РОЗСІЯННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДИФІКОВАНИХ РІВНЯНЬ ФАДДЕЄВА І МЕТОДУ ГІПЕРСФЕРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В.І. КОВАЛЬЧУК,<sup>1</sup> І.В. КОЗЛОВСЬКИЙ,<sup>2</sup> В.К. ТАРТАКОВСЬКИЙ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, фізичний факультет  
(Просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 1, Київ 03127)

<sup>2</sup>Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України  
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03680)

<sup>3</sup>Інститут ядерних досліджень НАН України  
(Просп. Науки, 47, Київ 03680)

УДК 539.17.01  
© 2010

Розраховано хвильові функції  $nd$ -системи, а також фази і перерізи  $nd$ -розсіяння при енергіях, нижчих за поріг розвалу дейтрона. Виходячи з модифікованих рівнянь Фаддєєва, що одержані у нашій попередній роботі для повної хвильової функції, ми виділили найбільш складну її частину, яка описує рух трьох нуклонів в області взаємодії, і розклали її у ряд по гіперсферичним поліномам з  $K = 0, 1, 2$ . Для коефіцієнтів розкладу (радіальних функцій від колективної змінної) складено систему одновимірних інтегральних рівнянь, яку потім було чисельно розв'язано для енергій нейтрона 2,45, 3 і 3,27 МеВ. У розрахунках використовували локальні  $NN$ -потенціали Малфлі–Тьона і Хюльтена. Результати обчислень фаз і перерізів  $nd$ -розсіяння задовільно узгоджуються з відповідними експериментальними даними.

існують розвинуті потужні методи обчислення тричастинкових хвильових функцій у континуумі, найбільш відомими з яких є рівняння Фаддєєва [1–3] та варіаційний метод Кона–Хюльтена з використанням розкладів за гіперсферичним базисом [4].

Фаддєєвський метод полягає у тому, що рівняння Шрьодінгера для тричастинкової хвильової функції перебудовується і зводиться до системи трьох рівнянь [2] з включенням граничних умов, як і для рівняння Ліпмана–Швінгера [1]. Кожне з фаддєєвських рівнянь є шостивимірним інтегральним рівнянням, розв'язок якого полягає спочатку у його перетворенні на нескінченну низку зв'язаних інтегральних рівнянь. Потім цей набір рівнянь обрізається і розв'язується звичайними чисельними методами [3]. Істотний недолік методу полягає у неможливості безпосереднього використання в ньому потенціалів із нескінченним радіусом дії, таких, наприклад, як потенціал Кулона [5]. Розв'язок задачі про розсіяння протона на дейтроні цим методом є надзвичайно складним і, до того ж, не є строго математично обґрунтованим [5–7], на відміну від формалізму самих рівнянь Фаддєєва.

Інший підхід до задачі  $nd$ -розсіяння – розв'язок вихідного тринуклонного рівняння Шрьодінгера варіаційним методом Кона–Хюльтена [8]. Хвильова функція системи нуклонів розділяється на дві частини – короткодіючу і асимптотичну [9]. Остання виражається звичайним чином через падаючу і розсіяну хвилі та матрицю зіткнень, а короткодіюча частина розкладається в ряд за гіперсферичними функціями. Коефіцієнти цього розкладу та фази розсіяння можуть бути знайдені після застосування варіаційної процедури. Обидва підходи, варіаційний і метод Фаддєєва, дають дуже близькі результати при опису експериментів з

## 1. Вступ

Сучасна теорія ядра носить переважно феноменологічний характер, майже за відсутності її мікроскопічного обґрунтування [1], тому важливим моментом до кращого фізичного розуміння багаточастинкових нуклонних систем та процесів за їх участі є вивчення саме тринуклонних систем. Порівняно з бінарними системами, опис тричастинкових станів у неперервному спектрі є нетривіальною теоретичною проблемою. Це пов'язано, перш за все, з тим, що у тричастинковій системі, крім пружного розсіяння, можливі ще й процеси перерозподілу та розщеплення. По-друге, згадані системи мають істотно різні енергетичні спектри. В той час, як спектр бінарної системи складається окремо з дискретних рівнів та континууму, тричастинкова система має суто вироджений спектр – певному значенню повної енергії можуть відповідати фізично різні стани системи. На теперішній час

$nd$ - та  $pd$ -розсіяння [10,11], але в останньому випадку лише варіаційний метод має строге обґрунтування при врахуванні кулонової взаємодії частинок.

Метою нашої роботи є побудова і використання методу обчислення перерізів  $nd$ -розсіяння при енергіях, нижчих за поріг розвалу дейтрона, що було почато ще в деяких наших попередніх роботах. Виходячи з загальновідомих рівнянь Фаддєєва [2] та використовуючи розкладання за гіперсферичними функціями, ми звели задачу про знаходження нейтрондейтронної хвильової функції у континуумі до системи одновимірних інтегральних рівнянь, розв'язок якої потребує значно меншого машинного часу, ніж чисельний розв'язок рівнянь Фаддєєва. Ми використовували прості модельні  $NN$ -потенціали з несепарабельною взаємодією без спін-ізоспінкової залежності, що, як тестові, тривалий час використовуються у подібних задачах багатьма дослідниками [12–18]. Звичайно, рівняння Фаддєєва, що містять лише просторові змінні, можна поширити ще й на випадок, коли взаємодія і хвильова функція залежать від спінових та ізоспінних змінних [19], але це будуть вже зовсім інші складні рівняння, які ми тут не розглядаємо. Для нашого випадку безспінних хвильових функцій і частинок однакової маси самі рівняння Фаддєєва в цьому сенсі можна розглядати як модельні рівняння, і одержані за їхньою допомогою конкретні результати для перерізів показують, що вплив спінових ступенів вільності при порівнянні з експериментом хоча би в деяких областях кінематики, але для багатьох випадків, буде досить малим. У розрахунках ми знехтували ще дублетною компонентою амплітуди розсіяння, оскільки з даних фазового аналізу [20,21] випливає, що внесок дублетного стану в переріз розсіяння сягає близько 1%. Незважаючи на згадані наближення, нам вдалося досягти задовільного узгодження з експериментами як для перерізів, так і для фаз розсіяння. Дана робота є продовженням і природним розвитком циклу наших робіт, який присвячено дослідженню розсіяння частинки на системі з двох зв'язаних частинок і початок якому було покладено у роботах [22].

## 2. Формалізм

Будемо виходити з відомих рівнянь Фаддєєва [2], записаних для системи трьох сильновзаємодіючих частинок з однаковими масами  $m$ , у якій одна частинка вільна, а дві інші – зв'язані:

$$\Psi^{(1)} = \Phi + G_0(Z)T_{23}(Z)(\Psi^{(2)} + \Psi^{(3)});$$

$$\Psi^{(2)} = G_0(Z)T_{31}(Z)(\Psi^{(3)} + \Psi^{(1)});$$

$$\Psi^{(3)} = G_0(Z)T_{12}(Z)(\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}), \quad (1)$$

де повна тричастинкова хвильова функція

$$\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)}, \quad (2)$$

$\Phi$  – асимптотична хвильова функція, що є добутком плоскої хвилі з імпульсом відносного руху 1-ї частинки і зв'язаної системи двох інших частинок та хвильової функції зв'язаного стану частинок 2 і 3;  $G_0(Z) = (Z - H_0)^{-1}$ ;  $Z = E \pm i0$ ;  $E$  – повна енергія системи;  $H_0$  – оператор кінетичної енергії;  $T_{ij}$  – двочастинкові оператори переходу, які зв'язані з парними потенціалами  $V_{ij}$  ( $ij = 12, 23, 31$ ) за допомогою рівнянь

$$T_{ij}(Z) = V_{ij} + V_{ij}G_0(Z)T_{ij}(Z). \quad (3)$$

Тут і надалі використовуємо систему одиниць, у якій  $\hbar = c = 1$ ; усі кінематичні величини відносяться до системи центра інерції (якщо не зумовлено інакше). Підставивши (3) у систему (1) і додавши рівняння, одержимо одне рівняння для повної хвильової функції

$$\Psi = \Phi + G_0(Z)(U\Psi - V_{23}\Phi), \quad U = V_{12} + V_{23} + V_{31}, \quad (4)$$

що, як і рівняння Фаддєєва, задовольняє ті ж самі граничні умови і також має однозначний розв'язок, оскільки воно одержане з (1)–(3) із використанням лише дії додавання і не було дії ділення на оператори.

Розкладемо різницю  $\Psi - \Phi$  у ряд за  $K$ -гармоніками:

$$\Psi - \Phi = \sum_{K_n} B_{K_n}(\rho)u_{K_n}(\Omega). \quad (5)$$

Підставляючи цей розклад у (4) та використовуючи умову ортонормування для  $K$ -гармонік, одержуємо систему зв'язаних інтегральних рівнянь для функцій  $B_{K_n}(\rho)$  [23]:

$$B_{K'n'}(\rho) = \frac{\pi m}{\rho^2} \int_0^\infty d\bar{\rho} \bar{\rho}^3 P_{\pm}^{(K')} \int d\Omega u_{K'n'}^*(\Omega) \times \\ \times \left\{ U \sum_{K_n} B_{K_n}(\bar{\rho})u_{K_n}(\Omega) + (V_{12} + V_{31})\Phi \right\}, \quad (6)$$

$$P_{\pm}^{(K')} \equiv P_{\pm}^{(K')}(\rho, \bar{\rho}) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq q \frac{J_2(q\rho) J_2(q\bar{\rho})}{q^2 - k_{K'}^2 \mp i0}, \quad (7)$$

де  $k_{K'}^2 = k_0^2 - K'(K' + 4)/\rho^2$ ,  $k_0^2 = 4m(E_n - \varepsilon)/3$ ,  $m$  – нуклонна маса;  $E_n$  – кінетична енергія падаючого нейтрона;  $\varepsilon$  – енергія зв'язку дейтрона. Потенціали  $V_{ij}$  і функція  $\Phi$  у правій частині рівняння (6) залежать від гіперрадіуса  $\bar{\rho}$  та п'яти кутових змінних  $\Omega$ . Ще раз підкреслимо, що граничні умови рівнянь Фаддєєва містяться і в рівняннях (6), бо вони одержані безпосередньо з (1) (див. [23]). Оскільки ми розглядатимемо пружне розсіяння, то для подальших розрахунків нам знадобиться тільки функція  $P_+^{(K')}$ , яка визначена у (7).

У попередній нашій роботі [24] при розрахунках перерізів  $nd$ -розсіяння у розкладі (5) ми обмежувалися лише першим доданком із  $K = 0$ . Тепер, використовуючи формалізм, розвинутий у роботі [23], врахуємо ще й доданки з  $K = 1$  і  $K = 2$ . Обчислення цих доданків дасть можливість встановити, що, по-перше, ряд (5), дійсно, є швидкозбіжним; по-друге, що поправки до амплітуди розсіяння, які пов'язані з гармоніками  $K = 1, 2$ , відносно малі.

Нехай  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  – радіуси-вектори частинок 1,2,3. Введемо для кожного з  $K$  набір квантових чисел  $n \equiv \{\ell_x, \ell_y, L, M\}$  [23,25], де  $\ell_x$  – орбітальний момент зв'язаної пари частинок 2 і 3;  $\ell_y$  – орбітальний момент 1-ї частинки відносно центра мас пари (23);  $x$  і  $y$  – відповідні координати Якобі:  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)/\sqrt{2}$ ,  $\mathbf{y} = \sqrt{2/3}(\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/2)$ . Квантові числа  $L, M$  – повний орбітальний момент та його проекція.

Залишаючи у розкладі (5) доданки лише з  $K = 0, 1, 2$ , у загальному випадку матимемо 27 зв'язаних інтегральних рівнянь для невідомих функцій  $B_{Kn}(\rho)$  (по числу наборів  $Kn$  [26]). Позначимо кожну з  $K$ -гармонік таким чином [23]:

$$u_K^{\ell_x \ell_y LM} \equiv \Phi_j(\Omega), \quad j = 1, 2, \dots, 27. \quad (8)$$

Ці  $K$ -гармоніки мають досить простий вигляд [23] і, що дуже важливо, при їх використанні система інтегральних рівнянь (6) суттєво спроститься, а саме: вона перейде в набір з двох систем рівнянь з двома невідомими та 23 незв'язаними рівняннями, більша частина яких (22 рівняння) є однорідними. А оскільки ці однорідні рівняння є рівняннями Вольтерра другого роду, то з [27,28] випливає, що за умови квадратичної інтегрованості ядра (яка виконується в нашому випадку) такі рівняння матимуть тільки тривіальні (нульові) розв'язки (що, до речі, підтверджується також і безпосередніми обчисленнями).

Отже, п'ять неоднорідних рівнянь, які залишаються у (6) і які треба розв'язувати, відповідатимуть

таким  $K$ -гармонікам [23,26]:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \equiv u_0^{0000} &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}, & \Phi_7 \equiv u_1^{0110} &= \sqrt{\frac{6}{\pi^3}} \sin \theta \cos \theta_y, \\ \Phi_{12} \equiv u_2^{2020} &= \frac{2}{\sqrt{\pi^3}} \cos^2 \theta (3 \cos^2 \theta_x - 1), \\ \Phi_{17} \equiv u_2^{0220} &= \frac{2}{\sqrt{\pi^3}} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta_y - 1), \\ \Phi_{26} \equiv u_2^{0000} &= \frac{2}{\sqrt{\pi^3}} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Відповідні коефіцієнти  $B_1(\rho), B_7(\rho), B_{12}(\rho), B_{17}(\rho)$  та  $B_{26}(\rho)$  у розкладі (5) будуть розв'язками таких інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} B_1(\rho) &= \frac{8m}{\rho^2} \int_0^\infty d\bar{\rho} \bar{\rho}^3 P_+^{(0)} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left( B_1(\bar{\rho}) + \right. \right. \\ &+ 2B_{26}(\bar{\rho}) \cos 2\theta \Big) V^* + \frac{\sqrt{2/3} \pi^{3/2}}{p \bar{\rho}} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \times \\ &\times \phi(\sqrt{2} \bar{\rho} \cos \theta) \sin(\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta) (V^* - 2V_{23}) \Big\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_{26}(\rho) &= \frac{16m}{\rho^2} \int_0^\infty d\bar{\rho} \bar{\rho}^3 P_+^{(2)} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos 2\theta \times \right. \\ &\times \left( B_1(\bar{\rho}) + 2B_{26}(\bar{\rho}) \cos 2\theta \right) V^* + \frac{\sqrt{2/3} \pi^{3/2}}{p \bar{\rho}} \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \cos 2\theta \phi(\sqrt{2} \bar{\rho} \cos \theta) \times \\ &\times \sin(\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta) (V^* - 2V_{23}) \Big\}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$B_7(\rho) = \frac{16m}{\rho^2} \int_0^\infty d\bar{\rho} \bar{\rho}^3 P_+^{(1)} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^4 \theta \cos^2 \theta B_7(\bar{\rho}) V^* + \right.$$

$$+ i \frac{\pi^{3/2}}{p \bar{\rho}} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \phi(\sqrt{2} \bar{\rho} \cos \theta) (V^* - 2V_{23}) \times$$

$$\times \left[ \frac{\sin(\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta)}{\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta} - \cos(\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta) \right]; \quad (12)$$

$$B_{12}(\rho) = \frac{128m}{5\rho^2} \int_0^\infty d\bar{\rho} \bar{\rho}^3 P_+^{(2)} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \times \right.$$

$$\times \cos^6 \theta B_{12}(\bar{\rho}) V^* + \frac{5\sqrt{2/3} \pi^{3/2}}{8p \bar{\rho}} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^4 \theta \times$$

$$\times \phi(\sqrt{2} \bar{\rho} \cos \theta) \sin(\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta) \times$$

$$\left. \times \int_0^\pi d\theta_x \sin \theta_x (3 \cos^2 \theta_x - 1) (V_{12} + V_{31}) \right\}; \quad (13)$$

$$B_{17}(\rho) = \frac{128m}{5\rho^2} \int_0^\infty d\bar{\rho} \bar{\rho}^3 P_+^{(2)} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^6 \theta \times \right.$$

$$\times \cos^2 \theta B_{17}(\bar{\rho}) V^* + \frac{5 \pi^{3/2}}{6p^2 \bar{\rho}^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \times$$

$$\times \cos^2 \theta \phi(\sqrt{2} \bar{\rho} \cos \theta) (V^* - 2V_{23}) \left[ \left( \sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{3}{\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta} \right) \sin(\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta) + \right.$$

$$\left. + 3 \cos(\sqrt{3/2} p \bar{\rho} \sin \theta) \right]; \quad (14)$$

Функція  $\phi(\sqrt{2} \bar{\rho} \cos \theta)$ , що входить до (10)–(14), є хвильовою функцією дейтрона, а величини  $V^*$ ,  $V_{23}$ ,  $V_{12}$ ,  $V_{31}$  (там же) визначаються таким чином:

$$V^* = 2V_{23} + \int_0^\pi d\theta_x \sin \theta_x (V_{12} + V_{31}),$$

$$V_{23} \equiv V(\sqrt{2} \bar{\rho} \cos \theta),$$

$$V_{12} \equiv V \left( \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2 \sin^2 \theta - \sqrt{3} \sin 2\theta \cos \theta_x} \right),$$

$$V_{31} \equiv V \left( \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin 2\theta \cos \theta_x} \right),$$

де  $V$  – нуклон-нуклонний потенціал.

Зауважимо, що використаний підхід, крім всього, має ще ту перевагу, що приводить до чисельного розв'язку системи інтегральних рівнянь для невеликого числа функцій, які залежать від однієї неперервної змінної.

### 3. Аналіз результатів розрахунків та висновки

Рівняння (10)–(14) було розв'язано чисельно для декількох значень енергій падаючих нейтронів  $E_n$  (2,45, 3 і 3,27 МеВ у лабораторній системі відліку). У розрахунках використовували такі потенціали  $NN$ -взаємодії:

1) потенціал Хюльтена [12]

$$V(r) = -\frac{\lambda_H}{\exp(\mu_H r) - 1}, \quad \lambda_H = 0,177 \text{ фм}^{-1},$$

$$\mu_H = 1,145 \text{ фм}^{-1}; \quad (15)$$

2) триплетний потенціал Малфлі–Тьона [13] з відштовхуючою м'якою серцевиною

$$V(r) = -\lambda_A \exp(-\mu_A r)/r + \lambda_R \exp(-\mu_R r)/r,$$

$$\lambda_A = 3,22 \text{ фм}^{-1}, \quad \mu_A = 1,55 \text{ фм}^{-1},$$

$$\lambda_R = 7,39 \text{ фм}^{-1}, \quad \mu_R = 3,11 \text{ фм}^{-1}. \quad (16)$$

Хвильова функція дейтрона вибиралася нами у вигляді [1]:

$$\varphi(r) = \sqrt{\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2\pi(\beta-\alpha)^2}} \frac{\exp(-\alpha r) - \exp(-\beta r)}{r} \quad (17)$$

із параметрами  $\alpha = \sqrt{m\varepsilon}$ ,  $\beta \simeq 7\alpha$ .

Обчислені функції  $B_j(\rho)$  ( $j = 1, 7, 12, 17, 26$ ) показано на рис. 1. З аналізу поведінки кривих, представлених на цьому рисунку, випливає що, по-перше,

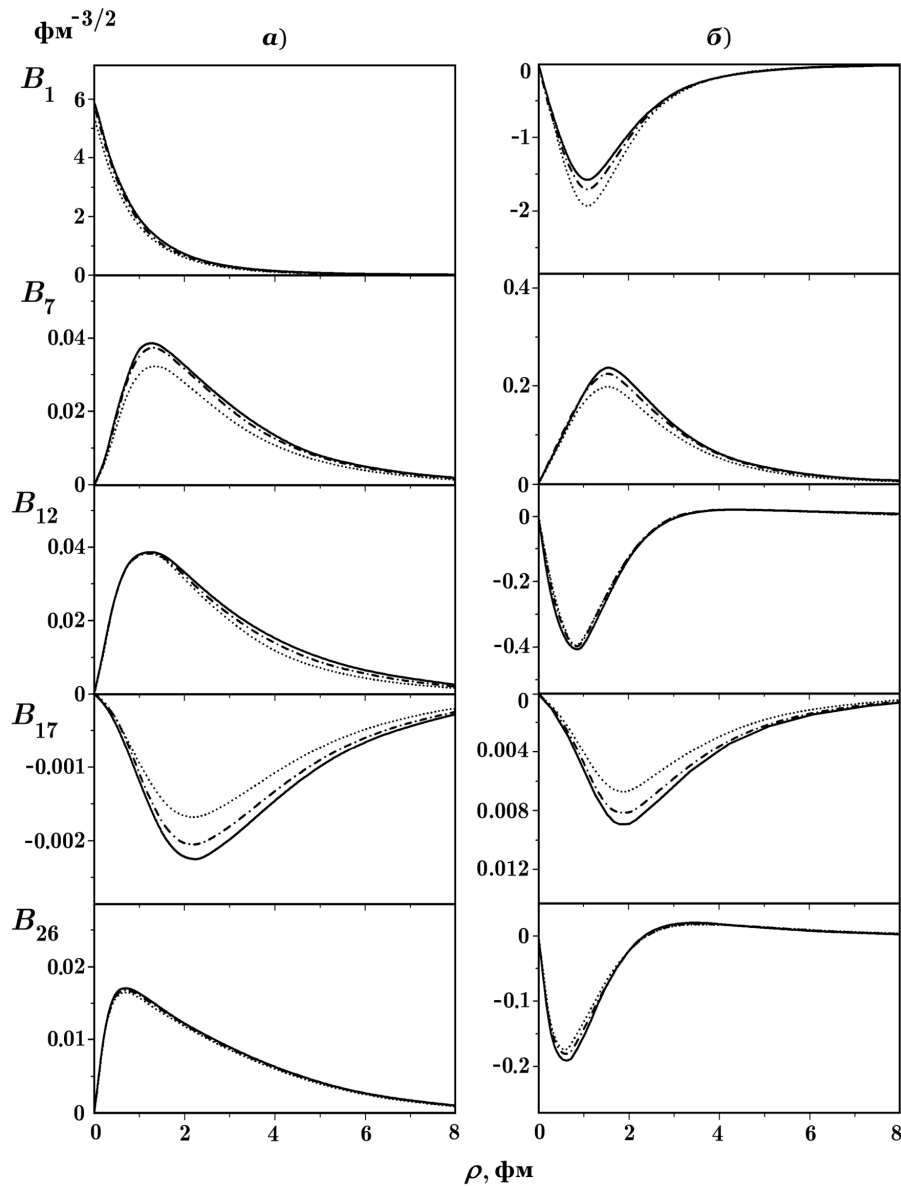


Рис. 1. Функції  $B_j(\rho)$  ( $j = 1, 7, 12, 17, 26$ ), розраховані для потенціалів Хюльгена (а) і Малфлі-Тьона (б) при енергіях падаючого нейтрона 2,45 MeV (точкові криві), 3 MeV (штрихпунктирні) та 3,27 MeV (суцільні)

$B_j(\rho)$  слабо залежать від енергії нейтрона у діапазоні  $E_n = 2,45\text{--}3,27$  MeV. По-друге, максимальні значення  $B_1(\rho)$  (для основної  $K$ -гармоніки з  $K = 0$ ) на порядок і більше перевищують за абсолютною величиною максимальні значення функцій  $B_j(\rho)$  для  $K$ -гармонік з  $K = 1$  і  $K = 2$ .

В табл. 1 наведено окремі внески в амплітуду  $nd$ -розсіяння  $A$  кожної з п'яти відмінних від нуля парціальних амплітуд  $A_j$  ( $j = 1, 7, 12, 17, 26$ ), розраховані для тих самих потенціалів взаємодії і значень  $E_n$ . В

останній колонці табл.1 – значення відносного внеску  $\delta A$  (у відсотках) для вищих  $K$ -гармонік з  $K = 1$  і  $K = 2$ :

$$\delta A = \frac{A_7 + A_{12} + A_{17} + A_{26}}{A_1 + A_7 + A_{12} + A_{17} + A_{26}}. \quad (18)$$

З табл. 1 можна бачити, що для потенціалу Хюльгена величина  $\delta A$  майже не залежить від  $E_n$ , сягаючи 5,3%, в той час, як для потенціалу Малфлі-Тьона  $\delta A$  істотно зростає навіть для невеликого енергетичного

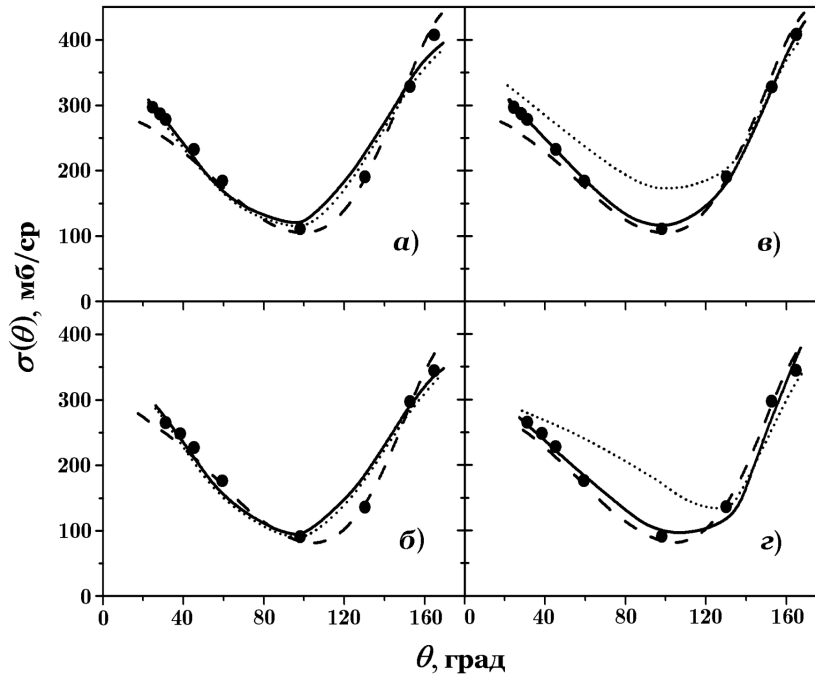


Рис. 2. Диференціальні перерізи  $nd$ -розсіяння, обчислені з використанням потенціалів Хюльтена (а, б) і Малфлі–Тьона (в, г) для енергій нейтрона  $E_n = 2,45$  MeV (а, в) і  $3,27$  MeV (б, г). Пояснення типів кривих див. у тексті. Експериментальні дані взято з роботи [29]

Т а б л и ц я 1. Внески  $A_j$  в амплітуду  $nd$ -розсіяння від кожної з п'яти парціальних амплітуд, відмінних від нуля ( $j = 1, 7, 12, 17, 26$ )

Потенціал	$E_n$ , MeV	$K$	$A_1$	$A_7$	$A_{12}$	$A_{17}$	$A_{26}$	$\delta A$ , %
			0	1	1	2	2	
Хюльтен	2,45		-7,019	-0,141	-0,158	-0,003	-0,074	5,1
	3		-7,616	-0,174	-0,173	-0,004	-0,076	5,3
	3,27		-8,011	-0,190	-0,179	-0,005	-0,077	5,3
Малфлі–Тьон	2,45		25,061	-1,569	-0,025	-0,013	-0,738	8,6
	3		23,098	-1,991	-0,018	-0,020	-0,745	13,6
	3,27		22,122	-2,212	-0,014	-0,024	-0,749	15,7

інтервалу (від 8,6% для  $E_n = 2,45$  MeV до 15,7% для  $E_n = 3,27$  MeV).

В табл. 2 для потенціалів (15), (16) наведено розраховані фази  $nd$ -розсіяння для відносних орбітальних моментів  $\ell = 0, 1, 2$  і двох енергій  $E_n = 2,45$  MeV і  $3,27$  MeV, для яких наявні експериментальні дані з пружного розсіяння нейтронів на дейтронах [29]. Для порівняння, в табл. 2 наведено також величини фаз, отримані іншими авторами у роботах [18, 20, 30–32] для аналогічної задачі з  $nd$ -розсіяння. Величини  $\eta$  є безрозмірними нормувальними коефіцієнтами [24] для внутрішньої частини повної хвильової функції тричастинкової задачі розсіяння.

На рис. 2, а–г показано кутові розподіли перерізів пружно розсіяних дейтронами нейтронів, розраховані з використанням потенціалів (15) і (16). Суцільні кри-

Т а б л и ц я 2. Фази  $\delta_\ell$  (в градусах)

$E_n$ , MeV	$\ell$	Тип потенціалу і розраховані величини $\delta_\ell$				Інші дані
		Хюльтен	$\eta$	Малфлі–Тьон	$\eta$	
2,45	0	-60,8	0,62	-53,3	0,78	-66,7 [18,30]
	1	15,4		16,3		23,1 [31]
	2	-4,0		-4,1		-4,2 [31]
3,27	1	-71,5	0,47	-64,3	0,80	-73,6 [20,32]
	2	15,8		17,8		25,6 [32]
	0	-7,5		-7,9		-4,6 [20]

ві на рис. 2 обчислені з урахуванням усіх п'яти функцій  $B_j(\rho)$ , тобто утриманням у розкладі (5) трьох  $K$ -гармонік з  $K = 0, 1, 2$ . Точкові криві відповідають врахуванню у (5) тільки  $B_1(\rho)$  (доданка з  $K = 0$ ). З аналізу представлених на рис. 2 кривих випливає, що для потенціалу Хюльтена внесок вищих  $K$ -гармонік ( $K = 1, 2$ ) у переріз не перевищує  $\sim 5\%$ , в той час як для потенціалу Малфлі-Тьона цей внесок може бути досить значним (особливо в мінімумах кутових розподілів). Суцільні криві в усіх випадках задовільно описують експериментальні дані. Для порівняння, на рис. 2 наведено результати роботи пізанської групи [33] (штрихові криві), де також аналізували експериментальні дані з роботи [29]. Незважаючи на те, що у [33] обчислення перерізів виконували із використанням реалістичного  $NN$ -потенціалу AV18 (при цьому до уваги брали також і тричастинкову взаємодію), результати нашої роботи і [33] досить близькі. Деяку відмінність обчислених нами величин  $S$ -,  $P$ - і  $D$ -фаз від результатів, одержаних іншими авторами (див. табл. 2) можна пояснити наближеністю розгляду задачі – до уваги брали лише ті фактори, які дають головний внесок у амплітуду розсіяння.

Таким чином, розвинутий нами метод обчислення перерізів пружного  $nd$ -розсіяння з простими моделями  $NN$ -взаємодії дозволяє задовільно описувати відповідні експерименти при енергіях нейтрона, нижчих за поріг розвалу дейтрона. Представивши повну хвильову функцію задачі  $\Psi$  як суму її асимптотичної частини і частини, яка описує тринуклонну систему в області взаємодії, ми звели задачу про знаходження  $\Psi$  до чисельного розв'язку системи одновимірних інтегральних рівнянь. Цей розв'язок не потребує значного машинного часу, на відміну від традиційних методів розв'язку тринуклонних задач у континуумі, які ґрунтуються на безпосередньому чисельному розв'язанні двовимірних інтегральних рівнянь в імпульсному представленні. Встановлено, по-перше, що врахування перших трьох  $K$ -гармонік при розкладі внутрішньої частини хвильової функції  $nd$ -системи є достатнім для задовільного опису відповідних експериментів з  $nd$ -розсіяння при допорогових енергіях нейтрона. По-друге, для таких енергій і використаних у розрахунках  $NN$ -потенціалів внесок основної  $K$ -гармоніки з  $K = 0$  в амплітуду реакції є переважним. Все це підтверджує ефективність запропонованого підходу.

1. О.Г. Ситенко, В.К. Тартаковський, *Теорія ядра* (Либідь, Київ, 2000).

2. Л.Д. Фаддеев, ЖЭТФ **39**, 1459 (1960).
3. G.H. Berthold and H. Zankel, Phys. Rev. C **34**, 1203 (1986).
4. M. Viviani, A. Kievsky, and S. Rosati, Few-Body Syst. **30**, 39 (2001).
5. J.V. Noble, Phys. Rev. **161**, 945 (1967).
6. S. Adya, Phys. Rev. **177**, 1406 (1968).
7. K.A.-A. Hamza and S. Edwards, Phys. Rev. **181**, 1494 (1969).
8. A. Kievsky, M. Viviani, and S. Rosati, Nucl. Phys. A **551**, 241 (1993).
9. A. Kievsky, Nucl. Phys. A **624**, 125 (1997).
10. D. Hüber, W. Glöckle, J. Golak *et al.*, Phys. Rev. C **51**, 1100 (1995).
11. A. Kievsky, M. Viviani, S. Rosati *et al.*, Phys. Rev. C **58**, 3085 (1998).
12. Л. Хюльтен, М. Сугавара, в сб. *Строение атомного ядра* (Изд-во иностр. лит., Москва, 1964).
13. R.A. Malfliet and J.A. Tjon, Nucl. Phys. A **127**, 161 (1969).
14. A. Kievsky, M. Viviani, and S. Rosati, Phys. Rev. C **56**, 2987 (1997).
15. J.L. Friar, B.F. Gibson, and G.L. Payne, Phys. Rev. C **28**, 983 (1983).
16. J.L. Friar, B.F. Gibson, G. Berthold *et al.*, Phys. Rev. C **42**, 1838 (1990).
17. J.L. Friar, G.L. Payne, W. Glöckle *et al.*, Phys. Rev. C **51**, 2356 (1995).
18. C.R. Chen, G.L. Payne, J.L. Friar, and B.F. Gibson, Phys. Rev. C **39**, 1261 (1989).
19. A.G. Sitenko and V.F. Kharchenko, Nucl. Phys. **49**, 15 (1963).
20. R.K. Adair, A. Okazaki, and M. Walt, Phys. Rev. **89**, 1165 (1953).
21. A.J. Elwyn, R.O. Lane, and A. Langsdorf, jr., Phys. Rev. **128**, 779 (1962).
22. О.Г. Ситенко, В.К. Тартаковський, І.В. Козловський, УФЖ **46**, 1251 (2001).
23. В.К. Тартаковський, І.В. Козловський, В.И. Ковальчук, Ядер. фіз. та енерг. **25**, 22 (2008).
24. В.І. Ковальчук, В.К. Тартаковський, І.В. Козловський, УФЖ **53**, 758 (2008).
25. Р.И. Джибути, Н.Б. Крупенникова, *Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел* (Мецниереба, Тбилиси, 1984).

26. Ю.А. Симонов, ЯФ **3**, 630 (1966).
27. Ф. Трикоми, *Интегральные уравнения* (Изд-во иностр. лит., Москва, 1960).
28. А.Д. Полянин, А.В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям* (Физматлит, Москва, 2003).
29. J.D. Seagrave and L. Cranberg, Phys. Rev. **105**, 1816 (1957).
30. S. Ishikawa, Few-Body Syst. **32**, 229 (2003).
31. M.G. Fuda and B.A. Girard, Phys. Rev. C **17**, 1 (1978).
32. A. Kievsky, M. Viviani, and S. Rosati, Nucl. Phys. A **577**, 511 (1994).
33. A. Kievsky, S. Rosati, W. Tornow, and M. Viviani, Nucl. Phys. A **607**, 402 (1996).

Одержано 21.05.09

РАСЧЕТЫ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ  $nd$ -СИСТЕМЫ, ФАЗ И СЕЧЕНИЙ  $nd$ -РАССЕЯНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА И МЕТОДА ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

*В.И. Ковальчук, І.В. Козловский, В.К. Тартаковский*

Резюме

Расчитаны волновые функции  $nd$ -системы, а также фазы и сечения  $nd$ -рассеяния при энергиях ниже порога развала дейтрона. Исходя из модифицированных уравнений Фаддеева, полученных в нашей предыдущей работе для полной волновой функции, мы выделили наиболее сложную ее часть, которая описывает движение трех нуклонов в области взаимодействия, и разложили ее в ряд по гипersферическим полиномам с  $K = 0, 1, 2$ . Для коэффициентов разложения (радиальных функций коллективной переменной) составлена система одномерных интегральных уравнений, которая была решена численно

для энергий нейтрона 2,45, 3 и 3,27 МэВ. В расчетах использовались локальные  $NN$ -потенциалы Малфли–Тьона и Хюльтена. Результаты расчетов фаз и сечений  $nd$ -рассеяния удовлетворительно согласуются с соответствующими экспериментальными данными.

CALCULATIONS OF WAVE FUNCTIONS OF THE  $nd$ -SYSTEM, PHASES, AND CROSS-SECTIONS OF  $nd$ -SCATTERING WITH THE USE OF MODIFIED FADDEEV'S EQUATIONS AND THE METHOD OF HYPERSPHERICAL FUNCTIONS

*V.I. Kovalchuk<sup>1</sup>, I.V. Kozlovsky<sup>2</sup>, V.K. Tartakovsky<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Physics (2/1, Academician Glushkov Ave., Kyiv 03127, Ukraine)

<sup>2</sup>Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine (14b, Metrolohichna Str., Kyiv 03680, Ukraine)

<sup>3</sup>Institute of Nuclear Research, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine (47, Nauky Ave., Kyiv 03680, Ukraine)

S u m m a r y

The neutron-deuteron wave functions,  $nd$  phases, and  $nd$  scattering cross-sections have been calculated for neutron energies below the deuteron breakup threshold. Starting from the modified Faddeev's equations which have got in our previous paper, the most complicated part of the full wave function describing the three-nucleon motion in the  $NN$  interaction region is separated and expanded into a series in hyperspherical polynomials with  $K = 0, 1, 2$ . The system of one-dimensional integral equations for the expansion coefficients has been constructed and solved numerically for incident neutron energies of 2.45, 3, and 3.27 MeV. The Malfliet–Tjon and the Hulthén local  $NN$  potentials were used in calculations. The calculated  $nd$  phases and  $nd$  scattering cross-sections satisfactorily fit the corresponding experimental data.