ПОРІВНЯННЯ ВАРІАЦІЙНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДА УСЕРЕДНЕНОГО ЛАГРАНЖІАНА І НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА ДЛЯ ХВИЛЬ НА ПОВЕРХНІ ШАРУ РІДИНИ

Ю.В. СЕДЛЕЦЬКИЙ

УДК 533.9

Інститут фізики НАН України
(Просп. Науки, 46, Київ 03028; e-mail: sedlets@iop.kiev.ua)

На прикладі хвиль на поверхні шару рідини продемонстровано, що варіаційні рівняння методу усередненого лагранжіана Уізема стають еквівалентними нелінійному рівнянню Шредінгера, якщо при побудові лагранжіана врахувати, крім перших після лінійних покращень польових функцій – другої і нульової гармонік, власне залучених Уіземом, ще й того ж порядку малості доданок в основній гармоніці.

1. Вступ

Нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ)

$$i\,(A_t + \omega_0' A_x) + \frac{1}{2}\omega_0'' A_{xx} + qA|A|^2 = 0 \qquad (1)$$

описує повільну еволюцію амплітуди $A(x,t)$ першої гармоніки майже лінійної хвилі $\eta(x,t)$

$$\eta(x,t) = b(x,t) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}A(x,t)\exp i\theta_0 + A_2(x,t)\exp 2i\theta_0 + \ldots + \text{к.с.}\right),$$

$$\theta_0 = k_0 x - \omega_0 t \qquad (2)$$

у слабко нелінійному і слабко дисперсійному недисипативному середовищі. Решта гармонік – нульова $b(x,t)$, друга $A_2(x,t)$ і вищі можуть бути перераховані за формулами, за якими вони були видалені (виражені) через $A(x,t)$ при зведенні рівнянь руху в середовищі до НРШ. При отриманні НРШ розклади по малій амплітуді хвиль можуть бути зроблені безпосередньо в рівняннях руху або у функціях, на яких будуються гамільтоніан чи лагранжіан хвиль і, отже, в них самих. Усереднення за швидкими осциляціями $\exp i\theta_0$ проводиться або формальним введенням повільних і швидких змінних, або інтуїтивним вибором у похідних найбільш суттєвих з них або інтегруванням по періоду швидких осциляцій. Розкладення і усереднення гамільтоніана чи лагранжіана виконуються раз і назавжди для подальшого їх використання: утворення еволюційних рівнянь, знаходження спектрів і т. д., тому виглядає привабливіше, ніж розкладання в рівняннях руху по-новому для кожної задачі. Так, отримані Захаровим у кінці 60-х рр. коефіцієнти розкладу гамільтоніанів по нелінійності для хвиль на поверхні рідини та в плазмі стали стандартними параметрами цих хвиль і використовуються для подальших застосувань [1]. Серед інших підходів треба виділити добре алгоритмізований для символьних перетворень метод асимптотичного розкладу похідної A_t [2].

Процедуру розрахунку нелінійних хвиль за допомогою усередненого за швидкими осциляціями лагранжіана розроблено на прикладі хвиль на поверхні рідини Уіземом [3–6] і поширено на інші середовища [7]. Однак отриманий в [4] лагранжіан містить розклад тільки за степенями амплітуди a^2 і a^4, але не містить похідних від a. Варіаційні рівняння вже містять похідні від a, але тільки перші. Відсутність a_{xx}, яка відповідає за дисперсію для імпульсів [8] або дифракцію для пучків викликає подив уже в лінійному випадку [9] і ускладнює розуміння зв'язку між теорією Уізема і НРШ. Неузгодженість варіаційних рівнянь Уізема з НРШ для хвиль на поверхні рідини відзначалась в [9], в плазмі – в [10]. Власне НРШ широко отримується методом усередненого лагранжіана Уізема, але обхідним шляхом. Так, НРШ, отримані цим методом для хвиль різної природи в [11–13], спираються на правило, що коефіцієнт при нелінійному члені в НРШ збігається з коефіцієнтом при нелінійному члені в нелінійному законі дисперсії, а метод усередненого лагранжіана Уізема саме дозволяє елегантно вирахувати нелінійний закон дисперсії за допомогою єдиного варіаційного рівняння – варіацією лагранжіана по амплітуді (див. далі (14)). У роботі [14] НРШ отримано з усередненого лагранжіана по теорії збурень, які вносились в усереднений лагранжіан при вбудуванні в метод Уізема підходу декількох масштабів. Прямий зв'язок між комбінацією двох варіаційних рівнянь теорії Уізема і НРШ знайдено в [15, 16], для хвиль на поверхні рідини в окремому випадку нескінченної глибини шляхом доповнення пробних функцій і лагранжіана Уізема доданком з похідними від амплітуди a. Дана робота узагальнює підхід [15, 16] на випадок довільної глибини, коли варіаційних рівнянь чотири.

2. Розширення пробних функцій і зміни в лагранжіані для шару рідини. Зміни в варіаційних рівняннях. Отримання НРШ для шару рідини

У методі багатьох масштабів формалізовано, що описання майже синусоїдальної нелінійної хвилі можна представити повільно осцилюючими гармоніками швидких осциляцій $\exp i\theta_0$ і повільно еволюціонуючою нульовою гармонікою $b(x,t)$, дійсною функцією (2). У роботах Уізема використовується запис через дійсні амплітуди

$$\eta(x,t) = b(x,t) + a(x,t)\cos\theta + a_2(x,t)\cos 2\theta,$$

$$\theta = k(x,t)x - \omega(x,t)t. \tag{3}$$

Представимо комплексні амплітуди $A(x,t)$, $A_2(x,t)$ гармонік в експоненціальній формі через дійсні амплітуди a, a_2 і фази $\widetilde{\theta}, 2\widetilde{\theta}$:

$$A(x,t) = a(x,t)\exp i\widetilde{\theta}(x,t), \tag{4}$$

$$A_2(x,t) = 2a_2(x,t)\exp 2i\widetilde{\theta}(x,t).$$

Порівнявши (3) з (2) бачимо, що

$$\widetilde{\theta} = (k\,(x,t) - k_0)x - (\omega\,(x,t) - \omega_0)t. \tag{5}$$

Ці пояснення позначень продиктовані тим, що вище НРШ записаний для комплексної амплітуди першої гармоніки профілю хвилі $A(x,t)$, а нижче – лагранжіан Уізема і відповідні варіаційні рівняння – для дійсних функцій $a(x,t), \widetilde{\theta}(x,t), b(x,t)$ – характеристик профілю хвилі (відхилень від рівноважної поверхні) (10) і четвертої повільно еволюціонуючої дійсної величини $\psi(x,t)$– нульової гармоніки потенціалу швидкості в (11). Зв'язок $A(x,t)$ з $a(x,t)$, $\widetilde{\theta}(x,t)$ – в (4) з урахуванням (5).

Передбачається, що зміни фази $\widetilde{\theta}$ у вигляді залежності $k\,(x,t)$ і $\omega\,(x,t)$ повільніші, ніж у швидкому наповненні $\exp i\theta_0$. Практично це означає, що теорію неможливо застосовувати в ситуаціях, коли внутрішнє заповнення $\exp i\theta_0$ складається тільки з декількох осциляцій на одну осциляцію зовнішньої обвідної A. Звідси маємо

$$\widetilde{\theta}_x = k(x,t) - k_0, \quad \widetilde{\theta}_t = -(\omega(x,t) - \omega_0). \tag{6}$$

Згідно з роботами Уізема [3–6] варіаційний принцип

$$\delta \int\int \mathcal{L}\left(a, \widetilde{\theta}, b, \psi\right) dxdt = 0, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L d\theta, \tag{7}$$

де L – функція Лагранжа, дає варіаційні рівняння для функцій $a(x,t)$, $\widetilde{\theta}(x,t)$, $b(x,t)$, $\psi(x,t)$.

За принципом Гамільтона лагранжіан хвиль на поверхні рідини дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергії рідини, а граничні умови вводяться множниками Лагранжа:

$$L = \int_{-h_0}^{\eta(x,t)} [\frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - gy]dy + \ldots \text{зв'язки}. \tag{8}$$

Тут $\eta(x,t)$ – профіль поверхні рідини (хвилі), φ – потенціал швидкості рідини, x, y – горизонтальна і вертикальна координати, h_0 – глибина рідини, g – прискорення земного тяжіння.

Люком [17] показано, що для безвихорної рідини і за умови усереднення за періодом швидких осциляцій (7), замість (8) можна використовувати зручнішу форму функції Лагранжа:

$$L = \int_{-h_0}^{\eta(x,t)} [\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + gy]dy. \tag{9}$$

Ключовим моментом даної роботи є врахування в пробних функціях профілю хвилі $\eta(x,t)$ і потенціалу швидкості $\varphi(x,t)$ крім використаних Уіземом основної (першої) гармоніки амплітуд a та ϕ і найближчих гармонік наступного порядку малості – другої і нульової, ще й покращень $a^{(1)}$, $\phi^{(1)}$ першої гармоніки, оскільки вони мають той же порядок малості (з'являються в тому ж наближенні) [18]:

$$\eta = \varepsilon^2 b + \varepsilon\left(a\cos\theta + \varepsilon a^{(1)}\sin\theta\right) + \varepsilon^2 a_2\cos 2\theta,$$

$$a^{(1)} = \frac{\omega_0'}{\omega_0}a_x,\ \omega_0' = \frac{\partial\omega}{\partial k}|_{k=k_0} \quad (10)$$

$$\varphi = \varepsilon^2\psi + \varepsilon\left(\phi\sin\theta + \varepsilon\phi^{(1)}\cos\theta\right) + \varepsilon^2\phi_2\sin 2\theta,$$

$$\phi^{(1)} = \left(h_0\frac{\cosh k_0\,(y+h_0)}{\cosh k_0 h_0} - \right.$$

$$\left. -(y+h_0)\frac{\sinh k_0\,(y+h_0)}{\sinh k_0 h_0}\right)\frac{\omega_0}{k_0}a_x. \quad (11)$$

Тут b – нульова гармоніка профілю хвилі, ψ – нульова гармоніка потенціалу швидкості – величини, які, як і амплітуди решти гармонік, повільно змінюються в часі і просторі і описують модуляції швидкозмінних коливань хвиль середовища, основна гармоніка яких є $\varepsilon a\cos\theta$ для η і $\varepsilon\phi\sin\theta$ для φ. Позначені штрихом похідні ω_0' – тут і ω_0'' далі беруться по хвильовому вектору k від лінійного закону дисперсії $\omega^2 = gk\tanh kh_0$ в точці "несучого" хвильового вектора k_0, ε – формальний параметр малості.

Повторення викладок Уізема [4] з цими уточненнями пробних функцій і з урахуванням, що в (10), (11) не тільки фази, але і амплітуди повільно залежать від координат x,t, дає уточнений лагранжіан:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{Whitham}} + c_1 a_x^2 + c_2 a a_{xx},$$

$$c_1 = -\frac{\omega_0^2}{16k_0^3\sigma^3}\left(k_0^2h_0^2(\sigma^2-1)^2 - \sigma^2\right),$$

$$c_2 = -\frac{\omega_0^2}{8k_0^3\sigma^2}\left(2k_0^2h_0^2\sigma(\sigma^2-1) - k_0h_0(\sigma^2-1) - \sigma\right),$$

$$\sigma = \tanh k_0h_0, \quad c_1 - c_2 \equiv \frac{\omega_0}{4\sigma k_0}\omega_0'', \quad (12)$$

де

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Whitham}} = \frac{1}{4}g\left(1 - \frac{(\omega-\psi_x k)^2}{gk\tanh kh}\right)a^2 +$$

$$+\frac{gD}{8}k^2a^4 + (\frac{1}{2}\psi_x^2 + \psi_t)h + \frac{1}{2}gb^2 \quad (13)$$

– лагранжіан Уізема [4, 7]. Тут, по можливості, збережено позначення з [4]:

$$D = \frac{9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 9}{8\sigma^4}, \qquad h = h_0 + b.$$

Уточнимо, що в (10) і (12) враховано, що згідно з лінійною теорією амплітуда обвідної поширюється з груповою швидкістю $a_t = -\omega_0'\,a_x$ і, що коефіцієнти в отриманих методом багатьох масштабів [18] виразах пробних функцій (10), (11) для замкненості підходу перевірені безпосереднім варіюванням усередненого лагранжіана (7), (9) по цих коефіцієнтах, як невідомих.

Лагранжіан (12) залежить від чотирьох функцій (a, θ, b, ψ), тому складемо чотири рівняння Ейлера.

1. У варіаційне рівняння по a:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_{xx}}$$

порівняно з [4] залучено праву частину, оскільки (12) ще й залежить від похідних a_x і a_{xx}. Ланцюжок перетворень дає

$$(\omega-\psi_x k)^2 = gk\tanh kh\left(1 + Dk^2a^2 - \frac{\omega_0\omega_0''}{g\sigma k_0}\frac{a_{xx}}{a}\right) + o(a^2),$$

$$\omega = \sqrt{gk\tanh kh_0} + \frac{1}{2}D\omega_0k^2a^2 + \frac{1-\sigma^2}{2\sigma}\omega_0 kb -$$

$$-\frac{1}{2}\omega_0''\frac{a_{xx}}{a} + \psi_x k + o(a^2, \frac{a_{xx}}{a}, b),$$

$$\omega - \omega_0 = \omega_0'(k-k_0) + \frac{1}{2}\omega_0''(k-k_0)^2 - \frac{1}{2}\omega_0''\frac{a_{xx}}{a} +$$

$$+\frac{1}{2}D\omega_0k_0^2a^2 + \omega_0k_0\frac{1-\sigma^2}{2\sigma}b + k_0\psi_x + o(a^2, \frac{a_{xx}}{a}, b, k-k_0).$$

Отже, маємо еволюційне рівняння для $\widetilde{\theta}$:

$$-\widetilde{\theta}_t = \omega_0'\widetilde{\theta}_x + \frac{1}{2}\omega_0''\left(\widetilde{\theta}_x^2 - \frac{a_{xx}}{a}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\omega_0 k_0^2 Da^2 + \omega_0 k_0 \frac{1-\sigma^2}{2\sigma} b + k_0\psi_x. \tag{14}$$

Новим порівняно з [4] тут є поява другого доданка в круглих дужках (14).

2. Для складання варіаційного рівняння Ейлера по $\widetilde{\theta}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \widetilde{\theta}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \widetilde{\theta}_t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \widetilde{\theta}_x} \tag{15}$$

врахуємо, що залежність від $\widetilde{\theta}$ в (12) міститься згідно з (6) в $\omega = \omega_0 - \widetilde{\theta}_t$ і $k = k_0 + \widetilde{\theta}_x$ (13). З (15) отримуємо еволюційне рівняння для a:

$$a_t + \omega_0' a_x + \frac{1}{2}\omega_0''\left(\widetilde{\theta}_{xx} a + 2\widetilde{\theta}_x a_x\right) = 0. \tag{16}$$

Тут перший доданок (16) випливає з першого, а решта – з другого доданка правої частини (15).

3. Рівняння Ейлера по b:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 0 \tag{17}$$

дає

$$gb + \frac{1}{2}\psi_x^2 + \psi_t + \frac{1}{4}a^2\left(\omega - \psi_x k\right)^2 \frac{1 - \tanh^2\left(k\left(h_0 + b\right)\right)}{\tanh^2\left(k\left(h_0+b\right)\right)} = 0.$$

Після спрощень маємо еволюційне рівняння для ψ

$$\psi_t + gb + \frac{1}{4}\omega_0^2 \frac{1-\sigma^2}{\sigma^2} a^2 = 0. \tag{18}$$

4. Рівняння Ейлера по ψ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_x} \tag{19}$$

веде до еволюційного рівняння для b

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_x h_0 + \frac{1}{2}\frac{k_0}{\omega_0} g a^2\right) = 0 \tag{20}$$

відповідно до першого і другого доданка правої частини (19). Рівняння (18), (20) тотожні відповідним рівнянням [4], бо в (17), (19) не проявляє себе новий доданок в (12) і рівнянням, отриманим методом багатьох масштабів в [20]. Як і в [4], використовуючи наближення про еволюцію нульових гармонік потенціалу швидкості ψ і висоти хвилі b з груповою швидкістю лінійних хвиль $\psi_t = -\omega_0'\psi_x$, $b_t = -\omega_0' b_x$, виражаємо з (18), (20) b і ψ_x:

$$b = -\frac{\omega_0^2}{4\sigma^2 k_0}\frac{\left(1-\sigma^2\right)k_0 h_0 + 2\sigma\frac{\omega_0}{k_0}\omega_0'}{gh_0 - {\omega_0'}^2} a^2,$$

$$\psi_x = -\frac{\omega_0^2}{4\sigma^2}\frac{\left(1-\sigma^2\right)\omega_0' + 2\frac{\omega_0}{k_0}}{gh_0 - {\omega_0'}^2} a^2.$$

Підставляючи це в (14), маємо

$$\widetilde{\theta}_t + \omega_0'\widetilde{\theta}_x + \frac{1}{2}\omega_0''\left(\widetilde{\theta}_x^2 - \frac{a_{xx}}{a}\right) - qa^2 = 0, \tag{21}$$

де

$$q = \frac{\omega_0 k_0^2}{16\sigma^2}\Bigg\{-\frac{9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 9}{\sigma^2} +$$

$$+2\left[(1-\sigma^2)^2 + \frac{1}{gh_0 - {\omega_0'}^2}\left(2\frac{\omega_0}{k_0} + (1-\sigma^2)\omega_0'\right)^2\right]\Bigg\}. \tag{22}$$

Отже, дійсні величини – амплітуда і фаза комплексної амплітуди обвідної A еволюціонують згідно із системою рівнянь (16) і (21). Додаючи (16) і (21), помножені, відповідно, на $i\exp i\widetilde{\theta}$ і $-a\exp i\widetilde{\theta}$, маємо одне рівняння для комплексної амплітуди обвідної A – нелінійне рівняння Шредінгера (1), отримане в даному контексті вперше в [21] методом багатьох масштабів, а вираз (22) збігається з коефіцієнтом при нелінійному члені НРШ [21, 22].

3. Висновок

У роботі показано зв'язок між варіаційними рівняннями Уізема і нелінійним рівнянням Шредінгера. Показано, що дійсні варіаційні рівняння теорії Уізема для модуля і фази комплексної амплітуди будуть еквівалентні НРШ для неї, якщо у функціях, на яких в [4, 7] будується лагранжіан (13) додатково врахувати ((10), (11)) всі інші доданки тієї ж степені малості, що і доданки, залучені Уіземом.

1. Ю. В. Седлецкий, Письма в ЖЭТФ **86**, 574 (2007).
2. В.П. Лукомський, І.С. Ганджа, УФЖ **54**, 217 (2009).
3. G.B.J. Whitham, Fluid Mech. **22**, 273 (1965).
4. G.B.J. Whitham, Fluid Mech. **27**, 399 (1967).
5. G.B.J. Whitham, Proc. R. Soc. A **299**, 6 (1967).
6. G.B.J. Whitham, Fluid Mech. **44**, 373 (1970).

7. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны* (Мир, Москва, 1977).
8. V.H. Chu and C.C. Mei, J. Fluid. Mech. **41**, 873 (1970).
9. W.D. Hayes, Proc. R. Soc. A **332**, 199(1973).
10. K.B. Dysthe, J. Plasma Phys. **11**, 63 (1974).
11. G.W. Kentwell, J. Plasma Phys. **34**, 289 (1985).
12. D.H. Peregrine and G.P. Thomas, J. Plasma Phys. **11**, 63 (1974).
13. В.П. Лукомский, Ю.В. Седлецкий, УФЖ **31**, 1379 (1986).
14. T. Kawahara, J. Plasma Phys. **18**, 305 (1977).
15. H.C. Yuen and B.M. Lake, Phys. Fluids **18**, 956 (1975).
16. Г. Юэн, Б. Лейк, *Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде* (Мир, Москва, 1987).
17. J.C. Luke, J. Fluid. Mech. **27**, 395 (1967).
18. Ю.В. Седлецкий, ЖЭТФ **124**, вып.1, 200 (2003).
19. В.Е. Захаров, ЖЭТФ **51**, в.4(10), 1107 (1966); Журн. прикл. мех. и техн. физ. №2, 86 (1968).
20. D.J. Benney and G.J. Roskes, Stud. Appl. Math. **48**, 377 (1969).
21. H. Hasimoto and H. Ono, J. Phys. Soc. Jpn. **33**, 805 (1972).
22. Yu.V. Sedletsky, J. Phys. A **41**, 035502 (2008).

Одержано 09.07.10

СРАВНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА УСРЕДНЕННОГО ЛАГРАНЖИАНА И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ

Ю.В. Седлецкий

Р е з ю м е

На примере волн на поверхности слоя жидкости продемонстрировано, что вариационные уравнения усредненного лагранжиана Уизема становятся эквивалентными нелинейному уравнению Шредингера, если при построении лагранжиана учесть, кроме первых после линейных улучшений полевых функций – второй и нулевой гармоник, собственно привлеченных Уиземом, еще и того же порядка малости слагаемое в основной гармонике.

COMPARISON BETWEEN THE VARIATIONAL EQUATIONS OF THE AVERAGED LAGRANGIAN METHOD AND A NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION FOR WAVES ON THE SURFACE OF A FLUID LAYER

Yu.V. Sedletsky

Institute of Physics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(*46, Prosp. Nauky, Kyiv 03028, Ukraine;*
e-mail: sedlets@iop.kiev.ua)

S u m m a r y

By the example of waves on the surface of a fluid layer, the variational equations obtained in the averaged Lagrangian method of Whitham are demonstrated to become equivalent to a nonlinear Schrödinger equation, if the construction of the Lagrangian involves a term related to fundamental harmonic in addition to the terms from the second and zero harmonics considered by Whitham to get linear corrections to the field functions.