ЧОТИРИФЕРМІОННА ВЗАЄМОДІЯ У НИЗЬКОЕНЕРГЕТИЧНОМУ НАБЛИЖЕННІ КВАНТОВОЇ ХРОМОДИНАМІКИ

С.В. КУТНІЙ, П.І. ГОЛОД

Інститут теоретичної фізики НАН України
(Вул. Метрологічна, 14b, Київ 03143)

УДК 539.1.01

Здійснено послідовне виведення моделі з чотирифермiонною взаємодією у низькоенергетичному наближенні КХД методом самоузгодженого поля. Результуючий лагранжіан, крім тривіального та кірального доданків, містить взаємодію векторних та псевдовекторних струмів.

1. Вступ

Як відомо, низькоенергетичні ефекти, пов'язані з сильними взаємодіями, не можуть бути описані пертурбативно. Тому великого значення набувають ефективні моделі. Моделі з чотирифермiонною взаємодією, які природно виникають із калібрувальних теорій поля, є особливо перспективними, адже їх можна розглядати як релятивістські аналоги моделі Бардіна–Купера–Шріффера й застосовувати до них методи, які добре працюють у теорії надпровідності.

Модель Намбу–Йони–Лазініо [1] є однією з таких ефективних теорій. Її було запропоновано ще до побудови квантової хромодинаміки, і в оригінальному вигляді ця модель не містить кольорів. У вісімдесятих–дев'яностих роках минулого століття інтерес до неї відновився. У межах цієї моделі було отримано спектр мас мезонів, що добре узгоджується з експериментом. Огляд здобутків можна знайти у [2].

У роботі [3] наведено обґрунтування моделі Намбу–Йони–Лазініо в межах КХД. Це обґрунтування спирається на припущення про структуру глюонних функцій Гріна. Оскільки точний вигляд глюонного пропагатора досі не відомий, така аргументація є не надто надійною. Тому набуває актуальності пошук інших способів обґрунтування.

Як виявляється, до глюонного поля, лагранжіан якого містить нелінійні доданки третього та четвертого ступеня за глюонними полями, можна застосувати метод самоузгодженого поля або, що те саме, метод квазісередніх Боголюбова (див., наприклад, [4]). Такий підхід було вперше запропоновано Кондо [5, 6]. У цих роботах Кондо, стартуючи з лагранжіана для вільного поля Янга–Міллса, показав наявність глюонного конденсату у вакуумному стані та прийшов до квадратичного за глюонними полями лагранжіана наближення середнього поля з масовим доданком, зумовленим конденсатом.

Генерація ефективної маси глюонного поля приводить до того, що його класичний потенціал у цьому наближенні стає юкавським, тобто квазілокальним. Тому, якщо додати до моделі кварки – чотирифермiонна взаємодія типу моделі Намбу–Йони–Лазініо буде нульовим наближенням ефективного кваркового лагранжіана

2. Метод самоузгодженого поля для КХД

Модель БКШ у теорії надпровідності містить нелінійність. Для цього випадку Боголюбов розвинув особливий варіант методу самоузгодженого поля. Важливо, що метод Боголюбова можна переформулювати у термінах континуального інтеграла (див., наприклад, [4]), що відкриває шлях для його застосування до різноманітних теорій поля.

До поля Янга–Міллса підхід Боголюбова було застосовано Кондо ([5, 6]). Ми будемо спиратися на ці результати.

Згідно з [5], стартуючи зі стандартного лагранжіана Янга–Міллса та послідовно вводячи середні поля

$\phi, \varphi^a, G_{\mu\nu}, B^a_{\mu\nu}, V^a_{\mu\nu}$, можна прийти до лагранжіана, який буде лише квадратичний за глюонними полями $\mathcal{A}^a_\mu$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{MF} + \frac{1}{2}\mathcal{A}^a_\mu \mathcal{K}^{\mu\nu\, ab}\mathcal{A}^b_\nu + \mathcal{A}_\mu \mathcal{J}^\mu. \quad (1)$$

Тут $\mathcal{L}_{MF}$ – частина лагранжіана, яка залежить лише від середніх полів:

$$\mathcal{K}^{ab}_{\mu\nu} = \delta^{ab}\left[-(1-\rho^2)(\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu) - \lambda^{-1}\partial_\mu\partial_\nu\right] -$$

$$-ig\sigma f^{abc}B^c_{\mu\nu} + \sigma_\phi \delta^{ab}\eta_{\mu\nu}\phi + \sigma_\varphi d^{abc}\eta_{\mu\nu}\varphi^c + \sigma_G\delta^{ab}\times$$

$$\times\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}G^\rho_\rho\right) + \sigma_V d^{abc}\left(V^c_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}V^{c\,\rho}_\rho\right). \quad (2)$$

Додавання до лагранжіана Янга–Міллса ферміонної частини, що описує кварки, приведе до появи кваркового внеску у струм $\mathcal{J}^\mu$:

$$\mathcal{J}^a_{q\,\mu} = \bar{\psi}_i\gamma_\mu T^a_{ij}\psi_j. \quad (3)$$

Лагранжіан (2) квадратичний за глюонними полями, а тому їх можна відінтеґрувати. Результуючий лагранжіан міститиме взаємодію кваркових струмів вигляду

$$\mathcal{L}_{qq} = -\frac{1}{2}\mathcal{J}^a_{q\,\mu}\left[\mathcal{K}^{-1}\right]^{\mu\nu\, ab}\mathcal{J}^b_{q\,\nu}. \quad (4)$$

У роботах [5, 6] Кондо продемонстровано, що ϕ може мати відмінне від нуля вакуумне середнє ϕ_0. Очевидно, що це вакуумне середнє пов'язане з ефективною масою глюона:

$$|\sigma_\phi\phi_0| \sim m^2_{\mathcal{A}}. \quad (5)$$

Числове значення $m_{\mathcal{A}}$ – близько 1 ГеВ.

З урахуванням цього $\mathcal{K}^{-1}$ можна розкласти в ряд за ступенями $(\sigma_\phi\phi_0)^{-1}$:

$$\left[\mathcal{K}^{-1}\right]^{\mu\nu\, ab} = \frac{1}{\sigma_\phi\phi_0}\eta^{\mu\nu}\delta^{ab} + O\left(\frac{1}{\sigma^2_\phi\phi^2_0}\right). \quad (6)$$

Очевидно, що доданки вищих порядків будуть малими, а значить, розклад матиме сенс, якщо

$$p_\mu < \sqrt{\sigma_\phi\phi_0} \quad (7)$$

і для середніх полів справджуватимуться аналогічні умови малості.

У нульовому порядку матимемо чотирифеpміонну взаємодію

$$\mathcal{L}^{(0)}_{qq} = -\frac{1}{2\sigma_\phi\phi_0}\bar{\psi}_i\gamma_\mu T^a_{ij}\psi_j\bar{\psi}_k\gamma^\mu T^a_{kl}\psi_l. \quad (8)$$

Умова (7), очевидно, задає низькоенергетичне наближення. Наведені вище міркування свідчать, що адекватний опис низькоенергетичного наближення квантової хромодинаміки має, крім моделі з чотирифеpміонною взаємодією типу Намбу–Йони–Лазініо, містити умову типу (7). Це може означати, що обрізання по імпульсах на масштабах порядку $m_{\mathcal{A}}$ є виділеним способом регуляризації, якому слід надавати перевагу. Питання вибору регуляризації важливе, адже модель Намбу–Йони–Лазініо неперенормовна.

3. Аналіз чотирифеpміонної взаємодії

Випишемо кваркову частину лагранжіана, залишаючи лише нульовий порядок розкладу (6):

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_i\left(i\hat{\partial} - m_0\right)\psi_i - \frac{1}{2\sigma_\phi\phi_0}\bar{\psi}_i\gamma_\mu T^a_{ij}\psi_j\bar{\psi}_k\gamma^\mu T^a_{kl}\psi_l. \quad (9)$$

Якщо T^a – генератори алгебри Лі $su(N)$, то чотирифеpміонний доданок можна спростити.

Нехай на $gl(N)$ задано білінійну форму

$$\langle X, Y\rangle \equiv \mathrm{Tr}\left[XT^aYT^a\right] = X_{ij}T^a_{jk}Y_{kl}T^a_{li}. \quad (10)$$

Ця форма буде інваріантною відносно приєднаної дії групи $GL(N)$:

$$\langle\Omega(X), \Omega(Y)\rangle = \mathrm{Tr}\left[X\omega^{-1}T^a\omega Y\omega^{-1}T^a\omega\right] =$$

$$= \Omega^{ab}\Omega^{ac}\mathrm{Tr}\left[XT^bYT^c\right], \quad (11)$$

$$\Lambda\delta^{ab} = \mathrm{Tr}\left[T^aT^b\right] = \mathrm{Tr}\left[\omega^{-1}T^a\omega\omega^{-1}T^b\omega\right] =$$

$$= \Omega^{ac}\Omega^{bd}\mathrm{Tr}\left[T^cT^d\right] = \Lambda\Omega^{ac}\Omega^{bc} \Rightarrow \quad (12)$$

$$\langle\Omega(X), \Omega(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle. \quad (13)$$

Базис генераторів T^a завжди можна вибрати так, щоб (12) справджувалося.

Відомо (див., наприклад, [7]), що для матричних груп Лі будь-яка Ad-інваріантна білінійна форма може бути подана у вигляді

$$\langle X, Y\rangle = \lambda\mathrm{Tr}\left[XY\right] + \mu\mathrm{Tr}X\mathrm{Tr}Y. \quad (14)$$

 ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2010. Т. 55, №11

Звідси випливає, що для форми (10)

$$T^a_{ij}T^a_{kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{jk}\delta_{il}. \quad (15)$$

Отже, лагранжіан можна переписати у вигляді

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_i\left(i\hat{\partial} - m_0\right)\psi_i - \frac{1}{2\sigma_\phi\phi_0}\Big[\lambda\bar{\psi}_i\gamma_\mu\psi_i\bar{\psi}_k\gamma^\mu\psi_k +$$

$$+\mu\bar{\psi}_i\gamma_\mu\psi_k\bar{\psi}_k\gamma^\mu\psi_i\Big]. \quad (16)$$

Модель Намбу–Йони Лазініо, як уже зазначалось, не містить кольорів. Це має фізичний сенс, адже, як ми знаємо, за низьких енергій частинки, що несли б вільний кольоровий заряд, не спостерігаються. Проте лагранжіан (16) містить останній доданок, який, на перший погляд, не є діагональним за кольорами, як квадратичний та перший чотирифермiонний. Дослідження лагранжіана у такій формі методом середнього поля, аналогічно до [1], потребувало би введення середнього поля, яке б мало вільні кольорові індекси й порушувало б глобальну кольорову симетрію, що було б нефізичним, адже усі спостережувані за низьких енергій частинки “білі”, тобто не мають вільних кольорових зарядів. Проте, як виявляється, насправді останній доданок еквівалентний сумі доданків, діагональних за кольорами, аналогічно до першого чотирифермiонного доданка.

За теоремою Фірца [8] маємо

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_i\left(i\hat{\partial} - m_0\right)\psi_i - \frac{1}{2\sigma_\phi\phi_0}\times$$

$$\times\Big[\mu\bar{\psi}_i\psi_i\bar{\psi}_k\psi_k - \mu\bar{\psi}_i\gamma^5\psi_i\bar{\psi}_k\gamma^5\psi_k + \left(\lambda - \frac{\mu}{2}\right)\times$$

$$\times\bar{\psi}_i\gamma_\mu\psi_i\bar{\psi}_k\gamma^\mu\psi_k - \frac{\mu}{2}\bar{\psi}_i\gamma^5\gamma_\mu\psi_i\bar{\psi}_k\gamma^5\gamma^\mu\psi_k\Big]. \quad (17)$$

Знайдемо λ та μ. Для цього використаємо таке нормування генераторів, що

$$T^aT^b = \frac{1}{2N}\delta^{ab} + \frac{1}{2}\left(if^{abc} + d^{abc}\right)T^c,$$

$$f^{ace}f^{bce} = N\delta^{ab}. \quad (18)$$

Тоді дістанемо

$$\langle I, I\rangle = \mathrm{Tr}\left[\sum_a (T^a)^2\right] = \frac{N^2-1}{2} = \lambda N + \mu N^2,$$

$$\langle T^a, T^b\rangle = \mathrm{Tr}\left[T^aT^cT^bT^c\right] =$$

$$= \mathrm{Tr}\left[T^aT^b\sum_c (T^c)^2\right] + if^{ace}\mathrm{Tr}\left[T^bT^cT^e\right] =$$

$$= \frac{N^2-1}{2N}\mathrm{Tr}\left[T^aT^b\right] - \frac{1}{2}f^{ace}f^{cef}\mathrm{Tr}\left[T^bT^f\right] =$$

$$= \frac{N^2-1}{4N}\delta^{ab} - \frac{N}{4}\delta^{af}\delta^{bf} = \frac{\lambda}{2}\delta^{ab}. \quad (19)$$

Таким чином, будемо мати

$$\lambda = -\frac{3}{2N}, \quad \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{N^2}. \quad (20)$$

Чотирифермiонний лагранжіан набуде вигляду

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_i\left(i\hat{\partial} - m_0\right)\psi_i - \frac{1}{4\sigma_\phi\phi_0}\times$$

$$\times\Big[\bar{\psi}_i\psi_i\bar{\psi}_k\psi_k - \bar{\psi}_i\gamma^5\psi_i\bar{\psi}_k\gamma^5\psi_k - \frac{N+2}{2N}\times$$

$$\times\bar{\psi}_i\gamma_\mu\psi_i\bar{\psi}_k\gamma^\mu\psi_k - \frac{1}{2}\bar{\psi}_i\gamma^5\gamma_\mu\psi_i\bar{\psi}_k\gamma^5\gamma^\mu\psi_k\Big]. \quad (21)$$

4. Висновок

Застосування методу середніх полів до динаміки глюонів дозволяє отримати модель із чотирифермiонною взаємодією як контрольоване наближення у низькоенергетичній границі квантової хромодинаміки. Структура ефективного лагранжіана загалом подібна до отриманої в [3], так що наш розгляд можна вважати обґрунтуванням припущень про структуру глюонних функцій Гріна.

Важливо, що структура лагранжіана дозволяє ввести безбарвні кваркові конденсати. Їх розглядові буде присвячено наступну роботу.

1. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961).

2. M.K. Volkov and A.E. Radzhabov, [arXiv: hep-ph/0508263v2].

3. M.K. Volkov, Fiz. Elem. Chast. At. Yadra **24**, 81 (1993).

4. А.В. Свидзинский *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости* (Наука, Москва, 1982).

5. K.-I. Kondo, [arXiv:hep-th/0307270v2].

6. K.-I. Kondo, [arXiv:hep-th/0311033v2].

7. П.И. Голод, А.У. Климык, *Математические основы теории симметрий* (УРСС, Москва, 2001).

8. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля* (Мир, Мир, 1984).

Одержано 02.04.09

ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ

С.В. Кутний, П.И. Голод

Р е з ю м е

Произведен последовательный вывод модели с четырехфермионным взаимодействием в низкоэнергетическом приближении КХД методом самосогласованного поля. Результирующий лагранжиан, кроме тривиального и кирального слагаемых, содержит взаимодействие векторных и псевдовекторных токов.

FOUR-FERMION INTERACTION IN THE LOW-ENERGY APPROXIMATION OF QUANTUM CHROMODYNAMICS

S.V. Kutnii, P.I. Golod

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics,
Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(*14b, Metrolohichna Str., Kyiv 03680, Ukraine*)

S u m m a r y

A model with the four-fermion interaction is derived using the self-consistent field method in the low-energy limit of quantum chromodynamics. The resulting Lagrangian contains not only the trivial and chiral terms but also the interaction of the vector and pseudovector currents.